DARBOUX

SUR UNE CLASSE DE COURBES ET DE SURFACES

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE

DE COURBES ET DE SURFACES

ALGÉBRIQUES

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE

DE

COURBES ET DE SURFACES ALGÉBRIQUES

ET SUR LA

THÉORIE DES IMAGINAIRES

PAR

GASTON DARBOUX

MEMBRE DE L'INSTITUT

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

SECOND TIRAGE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
A. HERMANN
Libraire de S. M. le Roi de Suède et de Norwège
8, Rue de la Sorbonne, 8

MDCCCXCVI

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE

L'ouvrage que je publie aujourd'hui se compose de deux parties distinctes.

Le texte constitue seulement une nouvelle rédaction d'un Mémoire présenté en 1869 [1] à l'Académie des Sciences, Mémoire dont l'impression a été retardée par bien des circonstances sur lesquelles il est inutile d'insister.

Les Notes contiennent l'examen détaillé de quelques questions qui s'étaient présentées dans mes recherches primitives, et que je n'avais pu traiter avec le développement qu'elles me paraissaient mériter.

Le but principal de l'ensemble de ce travail est l'étude d'une classe remarquable de surfaces du quatrième ordre, que je propose d'appeler *cyclides,* et qui admettent une conique double spéciale, le cercle de l'infini. Ces surfaces peuvent se décomposer en un plan, le plan de l'infini, et en une surface du troisième ordre, qui contient le cercle de l'infini. Elles donnent donc, par une transformation homographique, la surface la plus générale du quatrième ordre

(1) Voir l'extrait du Mémoire, *Comptes Rendus,* t. LXVIII, p. 1311, séance du 7 juin 1869.

à conique double, et la surface générale du troisième ordre. J'ai dû joindre à leur étude, pour la rendre à la fois plus nette et plus complète, celle des courbes qui jouent le même rôle qu'elles dans la géométrie à deux dimensions. Ces courbes, que j'appelle *cycliques*, sont soit les courbes planes du quatrième ordre ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle, soit les courbes sphériques qui résultent de l'intersection de la sphère avec une surface du second degré. Quelques propriétés relatives aux imaginaires se présentaient naturellement dans l'étude que j'avais entreprise; il m'a paru qu'il y aurait avantage à les développer avec la généralité qu'elles comportent. Ces explications justifieront, je l'espère, la composition et le plan de mon travail.

La première Partie est consacrée à l'étude de la transformation par rayons vecteurs réciproques, des foyers et des focales. Depuis 1869, bien des recherches importantes ont été ou mieux connues ou publiées sur les différentes méthodes de transformation. J'ai cru devoir conserver néanmoins les développements que j'avais présentés sur ce sujet, parce qu'ils sont élémentaires, et aussi parce qu'ils se rapportent à la plus intéressante de toutes les transformations considérées jusqu'à présent. J'ai ajouté à cette Partie, au moment de l'impression, l'indication d'un moyen nouveau et très simple de former l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. Les théories relatives aux imaginaires expliquent nettement, ce qui n'avait pas été fait jusqu'ici, les solutions singulières de l'équation aux dérivées partielles à laquelle on est conduit.

La deuxième Partie contient une étude détaillée des cyclides planes et sphériques. J'y examine les propriétés générales, la classification des différentes espèces de cycliques, et les propriétés métriques focales, qui sont la

généralisation des propositions connues de la théorie des coniques.

Parmi les cycliques, quelques-unes ont la plus grande analogie avec l'ellipse de Cassini; leur théorie est liée par les rapports les plus étroits aux beaux théorèmes de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques, et, d'autre part, avec quelques propositions générales relatives aux imaginaires en géométrie. La troisième Partie est donc consacrée à une étude des imaginaires; mais, après avoir démontré les propositions indispensables, je reviens promptement à l'objet spécial de mon travail, pour étendre à toute une classe de courbes planes et sphériques deux des propriétés fondamentales du cercle. On me permettra de signaler aussi un moyen nouveau de démontrer les propriétés métriques focales des coniques, en les déduisant directement de l'une des propositions générales que M. Chasles a prises pour bases de la théorie de ces courbes, dans son beau *Traité des Sections coniques*. Les Notes contiennent des développements nombreux et étendus se rapportant à cette Partie. Elle a d'ailleurs été modifiée en un point pendant l'impression. J'ai beaucoup simplifié la démonstration que j'avais donnée d'abord des théorèmes de Poncelet.

Les deux dernières Parties sont consacrées à l'étude analytique et géométrique des surfaces cyclides, abrégée et rendue plus facile par les développements qui précèdent Ce qui concerne la génération des cyclides, leur classification et la cyclide à quatre points doubles, qui a été depuis 1869 le sujet des recherches de quelques géomètres, n'a reçu aucune addition dans le texte. J'ai un peu changé la forme de la dernière Partie, consacrée à l'étude géométrique des cyclides et du système triple orthogonal qu'on peut former avec ces surfaces, en ajoutant quelques développements relatifs à une des plus belles conceptions de M. Cayley. Ce

géometre a eu le mérite de donner, le premier, sous une forme nette, grâce aux beaux travaux et aux études antérieures de Möbius et surtout de M. Chasles, les principes qui assujettissent, si je puis m'exprimer ainsi, la géométrie des relations métriques dans le plan et sur la sphère à celle du rapport anharmonique, appelée quelquefois aussi géométrie projective. Pour ne pas être accusé de me livrer à des spéculations théoriques sans aucune portée pratique, j'ai montré dans les Notes comment les principes de M. Cayley pouvaient conduire à des théorèmes intéressants, et en particulier à une méthode de tranformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure qui a été déjà donnée par M. Bonnet. Je généralise d'une manière assez étendue cette méthode de transformation.

Les Notes contiennent des développements relatifs à la géométrie de M. Cayley, à la transformation par rayons vecteurs réciproques, et à un système de coordonnées qui s'applique à la fois aux points, aux plans et aux sphères. M. Lie, professeur à l'Université de Christiania, a, le premier, considéré la sphère comme un élément de l'espace, et il a su établir les relations les plus intéressantes entre la géométrie des sphères et celle des lignes droites. Ne voulant développer ici que mes recherches personnelles, je me suis borné, dans les dernières Notes de cet ouvrage, à l'étude des cyclides, de leurs normales, de leurs sphères tangentes, et des courbes remarquables qu'on peut tracer et déterminer sur ces surfaces.

La deuxième et la quatrième Partie sont précédées d'une courte Notice historique. Quelques remarques et rectifications portant sur des travaux dont j'ai eu connaissance après avoir terminé sont placées à la fin des Notes.

Je serais heureux de voir ce travail, dont je sens autant que personne les imperfections, accueilli avec bienveillance

par les géomètres. Puisse-t-il amener quelques-uns d'entre eux à des études qui forment un intermédiaire et un lien naturel entre la théorie des quadriques et celle des surfaces de degré supérieur, empruntant aussi au rang qu'elles occupent une importance et un intérêt qu'on ne saurait méconnaître.

12 juin 1872.

SUR UNE CLASSE REMARQUABLE

DE COURBES ET DE SURFACES ALGÉBRIQUES

ET SUR

LA THÉORIE DES IMAGINAIRES

PREMIÈRE PARTIE.

De la transformation par rayons vecteurs réciproques, des foyers et des focales.

1.

De la transformation par rayons vecteurs réciproques dans le plan.

On sait que les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques, prises dans le cas le plus simple, sont les suivantes,

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

où x, y, X, Y désignent les coordonnées ordinaires de deux points correspondants. On peut les écrire de la manière suivante,

$$(1) \qquad X + Yi = \frac{k^2}{x - yi}, \qquad X - Yi = \frac{k^2}{x + yi},$$

et, sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'à un point, pris dans l'une des figures, ne correspond qu'un point de l'autre.

La transformation précédente offre le cas le plus simple, et

auquel peuvent se ramener tous les autres, des *transformations du second ordre*. On définit ainsi les transformations dans lesquelles à un point répond un seul point, et à une droite une conique. Désignons par I et J les points à l'infini sur le cercle, et par O le pôle de transformation; à une droite correspond, en général, un cercle passant par le pôle, c'est-à-dire une conique passant par les trois points O, I, J. Mais il y a trois séries de droites auxquelles correspondent d'autres droites: 1° les droites passant par le pôle O; 2° les droites passant par le point I, auxquelles correspondent des droites passant par le point J; 3° les droites passant par le point J, auxquelles correspondent des droites passant par le point I.

D'après cela, à un cercle de rayon nul, formé de deux droites passant, l'une par le point I, l'autre par le point J, correspondra aussi un cercle de rayon nul. Toutes ces remarques sont, d'ailleurs, des conséquences immédiates des formules de transformation (1).

Désignons par n l'ordre d'une courbe à équation réelle, et qui passera le même nombre de fois par les points imaginaires conjugués I et J. Soient i le nombre des branches de courbe se croisant en un des points I ou J, o le degré de multiplicité du pôle (o sera nul, si la courbe ne passe pas au pôle). Désignons par n', o', i' les nombres analogues pour la courbe transformée. Ces nombres vérifient les formules suivantes, qui s'appliquent à toutes les transformations du second ordre,

$$i' = n - i - o,$$
$$o' = n - 2i,$$
$$n' = n - 2i - o.$$

Ainsi, à une conique quelconque correspond une courbe du quatrième ordre ayant trois points doubles, le pôle et les deux points I et J; mais si la conique passe au pôle, la transformée est une courbe du troisième ordre ayant un point double au pôle, et passant une seule fois par les points I et J. Si elle est un cercle, la transformée est un cercle, ou une ligne droite, si ce cercle passe au pôle.

2.

Des foyers.

On sait qu'on nomme foyers d'une courbe plane les points pour lesquels deux des tangentes menées à la courbe ont $+i$ et $-i$ pour coefficients angulaires, c'est-à-dire passent par les deux points I et J. En d'autres termes, si des points I et J on mène deux faisceaux de tangentes à la courbe, les points d'intersection des droites de ces deux faisceaux sont les foyers de la courbe. Si celle-ci est de la $m^{\text{ième}}$ classe, et qu'elle passe i fois par chacun des points I et J, on ne pourra lui mener de chacun de ces points que $m-2i$ tangentes. Il y aura donc en tout $(m-2i)^2$ foyers; mais $m-2i$ seulement de ces foyers seront réels; car sur chacune des tangentes à la courbe menées d'un point I, il y a un foyer réel, et un seul, qui est à l'intersection de cette droite et de la droite imaginaire conjuguée.

Par exemple, les courbes du second degré ont quatre foyers, et deux seulement sont réels. Il est bien entendu d'ailleurs que, dans les formules précédentes, les points I et J sont des points multiples ordinaires pour la courbe considérée. Nous allons donner un exemple.

Considérons les courbes du 4e ordre qui admettent pour points doubles les deux points I et J. Ces courbes sont de la 8e classe, et de chacun de ces points on pourra leur mener 4 tangentes, qui se couperont en 16 points. Ces courbes auront donc 16 foyers, dont 4 seulement sont réels. Ces 4 foyers réels détermineront d'ailleurs tous les autres.

Au contraire, les *ovales de Descartes* ont, d'après une remarque faite par M. Cayley, les deux points I et J pour points de rebroussement. De chacun de ces points, on ne pourra leur mener que trois tangentes. Ces courbes auront donc seulement 9 foyers, dont 3 seront réels.

Quand la courbe passe par les deux points I et J, les tan-

gentes à la courbe menées en ces deux points forment deux faisceaux de i droites, qui sont des asymptotes de la courbe. M. Laguerre a proposé d'appeler *foyers singuliers* les points d'intersection des droites de ces deux faisceaux. Il y a donc i^2 foyers singuliers; i seulement sont réels et peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul, à centre réel, doublement tangents à la courbe aux deux points I et J.

Le cercle, par exemple, a un foyer singulier à son centre; les courbes du quatrième ordre, ayant pour points doubles les deux points I et J, ont deux foyers singuliers réels, etc.

Les foyers ordinaires jouissent d'une propriété très importante. Si on transforme une courbe par rayons vecteurs réciproques, les transformées des foyers sont les foyers de la courbe transformée. Cela est évident, si l'on considère les foyers comme des cercles de rayon nul. Cependant, si l'on place le pôle en un des foyers, ce foyer disparaît, et est remplacé par un rebroussement (deux branches tangentes en I et J).

La proposition précédente ne s'applique d'ailleurs qu'aux foyers ordinaires; les foyers singuliers d'une courbe ne deviennent pas les foyers singuliers de la transformée.

3.

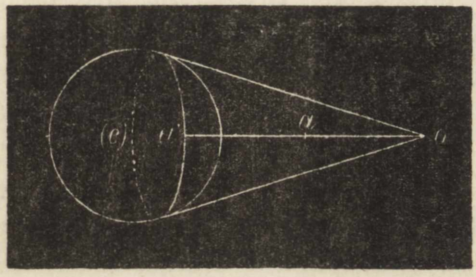
De la transformation par rayons vecteurs réciproques dans l'espace.

Voici comment on peut définir géométriquement cette transformation, qui est comprise comme cas particulier dans l'*involution quadrique* de M. Hirst.

Considérons une surface du second degré, et le cône du second degré circonscrit à cette surface suivant une conique (C) et ayant son sommet en O. Menons, par le point O, une droite quelconque qui coupe la surface aux deux points M, M′, et prenons sur cette droite deux points A, A′, divisant harmoniquement le segment MM′. Nous aurons une transfor-

mation dans laquelle à un point a correspondra un seul point a', et réciproquement. D'ailleurs, cette transformation sera, d'après une heureuse expression de M. Transon, une *transformation involutive*, c'est-à-dire qu'au point a considéré, soit dans la première, soit dans la seconde figure, correspondra toujours le même point a'.

Si l'on suppose maintenant que la surface du second degré



soit une sphère, que O soit le centre de cette sphère, on obtiendra la transformation par rayons vecteurs réciproques. En effet, si par le centre d'une sphère on mène un diamètre MM', deux points a, a', conjugués par rapport au segment MM', sont tels que

$$Oa \,.\, Oa' = R^2,$$

R étant le rayon de la sphère. On peut donc supposer que la surface du second degré considérée plus haut devienne une sphère, que O soit le centre; alors la courbe de contact (C) du cône de sommet O circonscrit à la sphère sera le cercle imaginaire à l'infini, et l'on aura la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Étudions d'abord la correspondance entre les points :

1° Au pôle O correspondent tous les points du plan de contact, c'est-à-dire du plan de l'infini.

2° Les seuls points qui se correspondent à eux-mêmes sont situés sur la surface du second degré, c'est-à-dire sur la sphère.

3° A tout point a situé sur le cône circonscrit (c'est-à-dire sphère de rayon nul ayant son centre au pôle) correspond un point a' situé sur le cercle de l'infini (C).

Mais au point a' correspondent *tous* les points de la droite Oa'. Car les points d'intersection de la surface et de la droite Oa' sont confondus en a', et par conséquent le conjugué harmonique de a' est indéterminé sur la droite Oa'.

On voit donc qu'il existe des points pour lesquels le point homologue est indéterminé : le pôle, auquel correspondent tous les points d'un plan, le plan de l'infini; et les points du cercle de l'infini (C), auxquels peuvent correspondre tous les points d'une droite, celle qui les joint au pôle.

Nous allons étudier maintenant les transformées de quelques figures simples, et nous commencerons par la ligne droite.

Considérons d'abord une droite $mnpq$, rencontrant la sphère fondamentale en m, n, et son cône asymptote en p, q. A cette droite correspondra une courbe plane, une conique située dans le plan de la droite et du pôle. Les points m et n se correspondent à eux-mêmes. Les points p, q ont leurs homologues p', q' sur le cercle de l'infini. Enfin, le point à l'infini sur la droite a pour homologue le pôle O. On voit donc qu'à la droite correspond la conique passant par les cinq points O, m, n, p', q'. Cette conique est un cercle, puisqu'elle coupe aux deux points p', q' le cercle de l'infini. Examinons dans quels cas elle se décompose.

1° Si la droite proposée passe par le pôle, elle se correspond à elle-même.

2° Si la droite coupe le cercle de l'infini en un point a, à ce point correspondront tous ceux de la droite Oa. Le cercle correspondant à une droite se décomposera : 1° en la droite Oa; 2° en une autre droite qu'on détermine de la manière suivante : la première coupe la sphère fondamentale en un point m, qui se correspond à lui-même, et le cône asymptote en un point b qui a pour homologue le point b' situé à l'infini sur le cercle (C) et sur la droite Ob. Ainsi à la droite mba correspond une droite mb' rencontrant aussi le cercle (C).

On voit donc qu'à une droite coupant le cercle de l'infini

correspond une autre droite coupant le cercle de l'infini en un autre point.

Tels sont, comme on s'en assurera aisément, les seuls cas dans lesquels à une droite corresponde une autre droite.

Les lignes que nous venons de trouver jouent d'ailleurs un rôle des plus importants dans la géométrie métrique; nous aurons à les employer fréquemment et à les considérer soit comme les génératrices rectilignes imaginaires des sphères, soit comme jouissant de cette propriété que la distance de deux quelconques de leurs points situés à distance finie est nulle. Nous allons établir ces propositions.

Une sphère contenant toujours le cercle (C), on voit que toutes les génératrices rectilignes des sphères seront assujetties à rencontrer ce cercle. D'autre part, étant donnée une droite Δ rencontrant le cercle (C), il est clair qu'on pourra construire une infinité de sphères contenant cette droite, et dont les centres seront dans le plan tangent mené par la droite Δ au cercle (C).

En particulier, toute droite rencontrant le cercle (C) pourra être placée sur une sphère de rayon nul (cône ayant (C) pour base), ayant son centre en un quelconque de ses points, et par conséquent tous les points situés à distance finie sur cette droite seront à une distance nulle de l'un d'eux.

Après avoir examiné les droites, considérons une courbe quelconque, et supposons qu'elle rencontre le plan de l'infini en p points non situés sur le cercle (C), et en i points sur ce cercle. Son ordre n, c'est-à-dire le nombre de points dans lesquels elle est rencontrée par un plan sera donc $p+i$. Supposons, en outre, qu'elle coupe le cône asymptote de la sphère en r points, et que le nombre de ses branches passant au pôle soit égal à q. Désignons par des lettres accentuées les mêmes nombres pour la transformée. On aura

$$q' = p, \quad p' = q, \quad i' = \quad, \quad i = r',$$
$$n' = n + q' - q, \quad p + i = n, \quad p' + i' = n'.$$

Nous écartons, bien entendu, les particularités.

Appliquons les principes précédents à la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre. L'ordre de cette courbe est 4; elle coupe le plan de l'infini en quatre points situés sur le cercle (C), le cône circonscrit (OC) en quatre points. On a donc généralement

$$p=0, \quad i=4, \quad r=4, \quad n=4, \quad q=0,$$

et, par suite,

$$p'=0, \quad i'=4, \quad r'=4, \quad n'=4, \quad q'=0.$$

La transformée sera donc une courbe sphérique analogue, et nous verrons que cette nouvelle courbe se trouve aussi sur une infinité de surfaces du second degré.

Si, au contraire, on prend pour pôle un point de la courbe, la transformée est une cubique plane, passant par les deux points à l'infini sur le cercle, ou *cubique circulaire*. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces questions.

Les formules relatives aux surfaces se trouvent aussi sans difficulté. On pourra consulter un article de M. Moutard sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864.)

4.

Des focales des courbes et des surfaces.

Nous avons vu que, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, les droites qui rencontrent le cercle de l'infini se transforment en des droites rencontrant le même cercle. Ainsi les surfaces réglées formées de ces droites se transforment en surfaces réglées.

On peut compléter ce résultat, et démontrer que *les surfaces développables formées de ces droites se transforment en surfaces développables*. Car de telles surfaces développables peuvent être considérées comme les enveloppes des sphères de rayon nul (ou cônes ayant (C) pour base), ayant leurs centres sur

l'arête de rebroussement de la développable. Or ces sphères de rayon nul se transforment en sphères de rayon nul : ce qui démontre la proposition.

Les développables remarquables que nous venons de considérer se présentent dans un grand nombre de questions. Nous les appellerons *développables focales*, et nous allons d'abord nous en servir pour donner la définition des focales d'une surface.

On ne connaissait les foyers que dans les courbes du second degré, quand Plücker donna de ces points une définition qui s'étend à toutes les courbes. On généralise de même, et sans difficulté, la notion de focale due à M. Chasles pour les surfaces du second degré, en donnant des focales la définition suivante, que nous avons proposée dans une Note insérée en 1864 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Circonscrivons à une surface quelconque et au cercle (C) une surface développable. Cette surface aura des lignes doubles qui suffiront à la déterminer, et qu'on appellera *les focales de la surface*. Par chaque tangente de la focale on peut mener deux plans tangents communs à la surface et au cercle de l'infini.

Nous appellerons *foyer* d'une surface tout point de la focale. Il est clair que le foyer peut aussi être défini le centre d'une sphère nulle doublement tangente à la surface.

Il est inutile d'indiquer que la définition précédente concorde avec celles qui ont été adoptées pour les surfaces du second degré.

5.

Propriétés des développables focales.

Étudions d'abord les propriétés principales des développables singulières qui nous ont permis de définir les focales.

Leurs plans tangents sont circonscrits au cercle de l'infini que

nous appellerons aussi le cercle (C). Ce cercle (C) d'ailleurs intervient, comme on sait, dans la définition des angles et de la perpendicularité. Si un plan coupe le plan de l'infini suivant une droite Δ, toute perpendiculaire à ce plan vient rencontrer le plan de l'infini au pôle de Δ par rapport au cercle (C). Il suit de là qu'un plan devient parallèle à sa perpendiculaire dès qu'il passe par une tangente au cercle (C).

On voit donc que les normales à nos surfaces développables focales coïncideront avec les génératrices rectilignes de ces surfaces.

D'ailleurs, l'arête de rebroussement de la surface étant telle que sa tangente va toujours rencontrer le cercle de l'infini, en tout point de cette courbe on aura

$$ds^2 = 0,$$

et, par conséquent, un *arc quelconque de cette arête de rebroussement sera nul.*

En partant de cette propriété de l'arête de rebroussement, on peut indiquer la forme caractéristique que prend sur les développables focales la formule qui donne la distance de deux points infiniment voisins. Car soient x, y, z les coordonnées, fonctions d'un paramètre u, d'un point de rebroussement, on aura

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 0;$$

et d'ailleurs tout point de la développable focale est défini par les valeurs suivantes des coordonnées :

$$(2) \qquad X = x + \lambda\frac{dx}{du}, \qquad Y = y + \lambda\frac{dy}{du}, \qquad Z = z + \lambda\frac{dz}{du},$$

d'où l'on déduit

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \lambda^2\left[\left(\frac{d^2x}{du^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{du^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right)^2\right]du^2,$$

ou

$$(3) \qquad dS^2 = \lambda^2\varphi(u)\,du^2.$$

On voit que, si l'on change de variable, on a la forme plus générale

$$(4) \qquad dS^2 = (a\,d\alpha + b\,d\beta)^2.$$

Cette forme est d'ailleurs caractéristique des développables étudiées; car elle entraîne cette propriété, qu'en chaque point de la surface il y aura une seule direction pour laquelle dS sera nul; en d'autres termes, le plan tangent sera constamment circonscrit au cercle de l'infini.

Toutes les lignes tracées sur la surface seront des lignes de courbure; car les normales à la surface en tous leurs points, engendrant la surface elle-même, formeront toujours une surface développable.

Il suit de là que, si l'on circonscrit à une surface quelconque une développable focale, la courbe de contact des deux surfaces sera une ligne de courbure commune aux deux surfaces; d'où le théorème suivant :

Sur toute surface, on peut déterminer en termes finis une ligne de courbure imaginaire, et cette ligne est la courbe de contact de la surface avec la développable focale circonscrite [1].

Il est facile de s'assurer que cette ligne de courbure est distincte de l'enveloppe des lignes de courbure (quand les lignes de courbure ont une enveloppe). Elle donne donc une *solution particulière* de l'équation différentielle des lignes de courbure.

Considérons, par exemple, la surface du second degré dont l'équation est

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0.$$

Exprimons que le plan tangent est parallèle aux plans asymptotes de la sphère; nous trouvons

$$(6) \qquad \frac{x^2}{(a-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c-\lambda)^2} = 0.$$

---

[1] Voir la communication aux *Comptes rendus*, 1864, et un travail de l'auteur dans les *Annales de l'École Normale*, même année.

Cette équation représente un cône, qui coupera la surface suivant une ligne imaginaire, laquelle sera ligne de courbure. En effet, prenons l'intersection de la surface précédente (5) avec une autre surface homofocale

$$\frac{x^2}{a-\lambda'}+\frac{y^2}{b-\lambda'}+\frac{z^2}{c-\lambda'}-1=0\,.$$

L'intersection des deux surfaces se trouve sur le cône

$$\frac{x^2}{(a-\lambda)(a-\lambda')}+\frac{y^2}{(b-\lambda)(b-\lambda')}+\frac{z^2}{(c-\lambda)(c-\lambda')}=0\,,$$

et lorsque λ se rapproche de λ', on a la ligne de courbure indiquée plus haut, qui est, comme on voit, l'intersection de la surface avec la surface homofocale infiniment voisine.

La considération du cercle de l'infini permet encore de trouver une classe importante de lignes géodésiques. Supposons que, sur une surface donnée, on sache intégrer l'équation

$$ds^2=0\,.$$

On obtiendra sur cette surface deux séries de lignes de longueur nulle. Je dis qu'on doit les considérer comme des lignes géodésiques, correspondantes au cas où la force vive est nulle. En effet, le plan osculateur de ces lignes est parallèle à deux tangentes infiniment voisines, c'est-à-dire à deux génératrices infiniment voisines du cône asymptote de la sphère. Donc, si l'on mène dans le plan tangent à une surface en M la droite δ allant rencontrer le cercle de l'infini, le plan mené par cette droite tangentiellement au cercle de l'infini sera le plan osculateur de la ligne de longueur nulle passant en M et tangente à la droite δ. Ce plan osculateur, étant normal à la droite δ, sera donc normal au plan tangent. Les lignes de longueur nulle considérées possèdent donc la propriété caractéristique des lignes géodésiques.

Le calcul conduit au même résultat. Soit, sur une surface,

$$ds^2=\lambda(dx^2+dy^2) \tag{7}$$

l'expression de la distance de deux points infiniment voisins.

On a, pour trouver les lignes géodésiques, à intégrer l'équation

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=2c\lambda\ .$$

Cette équation s'intègre, quel que soit λ, quand c est nul, et elle conduit aux lignes

$$dx^2+dy^2=0\ .$$

Revenons aux surfaces développables, et imaginons une courbe quelconque tracée sur ces surfaces. Cette courbe aura pour normales les génératrices de la surface. Donc

L'arête de rebroussement de la développable est une développée commune à toutes les courbes tracées sur cette surface.

Si l'on prend, en particulier, une section plane quelconque, il résulte de la proposition précédente que sa développée sera la projection, sur le plan de la section, de l'arête de rebroussement de la surface, et, par conséquent, *les sections de la développable par des plans parallèles se projetteront sur l'un de ces plans suivant des courbes parallèles.*

De même, si l'on coupe la développable par une sphère, *la développée sphérique de la courbe de section sera la projection conique de l'arête de rebroussement,* le centre de projection étant le centre de la sphère. Cela résulte de ce que la surface polaire (ou lieu des développées) d'une courbe sphérique est un cône.

Il résulte de là que *les sections par des sphères concentriques se projettent coniquement sur une de ces sphères suivant des courbes sphériques parallèles* ([1]).

Ces remarques vont nous permettre de donner quelques propriétés et en quelque sorte la représentation de la surface développable circonscrite à deux surfaces du second degré. Cette développable a pour ligne double une conique. Son arête

---

([1]) Voir des cas particuliers de ces propositions énoncés par M. Moutard *(Nouvelles Annales),* par M. Laguerre *(Bulletin de la Société Philomathique),* et par l'auteur dans le travail cité de 1864 *(Annales de l'École Normale supérieure).*

de rebroussement se projette suivant la développée de cette conique, et, pour avoir un point de cette arête, il faudrait élever en chaque centre de courbure une perpendiculaire égale au rayon de courbure multiplié par $\pm\sqrt{-1}$. La développée étant du 6e ordre, l'arête de rebroussement est du 12. Quant à l'équation de la surface, elle est en quelque sorte identique à celle des courbes parallèles à l'ellipse. Si R désigne la distance comptée sur chaque normale de l'une de ces courbes à l'ellipse, il faut remplacer R par $z\sqrt{-1}$.

L'arête de rebroussement de la développable focale circonscrite à une surface fait évidemment partie du lieu des centres de courbure de la surface. Il résulte de là que toutes les surfaces des centres de courbure d'une série de surfaces homofocales contiennent une même courbe, de longueur nulle, ligne géodésique singulière pour chacune d'elles.

6.

Applications des propositions précédentes à des problèmes connus.

Avant de continuer cette étude, nous allons indiquer l'emploi qu'on peut faire des remarques précédentes soit pour expliquer quelques résultats obtenus par le calcul, soit pour simplifier la solution de certaines questions.

Proposons-nous d'abord le problème traité par Euler : Résoudre l'équation

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

c'est-à-dire trouver des expressions de x, y, s en fonction d'un paramètre θ, débarrassées de tout signe d'intégration, et satisfaisant à l'équation précédente.

En changeant dans l'équation précédente s en $z\sqrt{-1}$, elle deviendra

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

et nous serons ainsi ramenés à la question suivante : *Trouver*

dans l'espace les équations en termes finis des courbes de longueur nulle.

La solution de ce problème est une conséquence immédiate de ce qui précède.

On prendra un plan

(9) $$\alpha x + \beta y + i\gamma z + \delta = 0 ,$$

où les coefficients α, β, γ, δ seront des fonctions d'un seul paramètre, satisfaisant à l'unique équation

(10) $$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 .$$

L'arête de rebroussement de la développable, enveloppe de ce plan, sera la courbe cherchée.

On peut résoudre d'une infinité de manières l'équation (10), par exemple, en posant

$$\gamma = 1 , \qquad \alpha = \cos\theta , \qquad \beta = \sin\theta ;$$

l'équation (9) deviendra, dans ce cas, en y remplaçant iz par s

(11) $$x\cos\theta + y\sin\theta + s + f(\theta) = 0 .$$

Il ne reste plus qu'à prendre les deux dérivées successives par rapport à θ,

$$-x\sin\theta + y\cos\theta + f'(\theta) = 0 ,$$
$$-x\cos\theta - y\sin\theta + f''(\theta) = 0 ,$$

qui donneront

(12) $$\begin{cases} s = -f(\theta) - f''(\theta) , \\ x = f'(\theta)\sin\theta + f''(\theta)\cos\theta , \\ y = -f'(\theta)\cos\theta + f''(\theta)\sin\theta . \end{cases}$$

C'est la solution connue.

Mais on peut encore obtenir d'autres formes en résolvant d'une autre manière l'équation (10), par exemple, en posant

$$\alpha^2 = \frac{a-\rho}{(a-b)(a-c)} , \qquad \beta^2 = \frac{b-\rho}{(b-a)(b-c)} ,$$

$$-\gamma^2 = \frac{c-\rho}{(c-a)(c-b)} , \qquad \delta = f(\rho) ,$$

ρ étant le paramètre variable, etc.

La même méthode s'étend, par analogie, à l'équation plus compliquée

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 ,$$

intégrée par M. J.-A. Serret (*Journal de Liouville,* t. XIII, p. 355).

Si l'on considère la fonction

$$(13) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta s + \varepsilon ,$$

où

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0 ,$$

et où α, β, γ, δ, ε sont des fonctions d'un seul paramètre, en joignant à l'équation (13) les trois premières dérivées, on aura ainsi quatre équations qui donneront x, y, z, s en fonction d'un seul paramètre, et qui contiendront deux fonctions arbitraires d'une seule variable. Par exemple, on pourra prendre :

$$\delta = 1 , \quad \alpha = \cos\theta , \quad \beta = \sin\theta\cos\varphi , \quad \gamma = \sin\theta\sin\varphi ,$$
$$\varepsilon = f(\theta) , \quad \varphi = F(\theta) ,$$

et l'on trouvera des formules plus compliquées que celles d'Euler, ayant cependant avec elles une analogie indiquée par la similitude des méthodes. Mais il convient de réserver les développements que j'aurais à présenter sur ces questions et sur d'autres analogues pour un travail spécial.

Dans un autre Mémoire inséré au *Journal de Liouville* (t. XIII, p. 361), M. Serret a aussi été conduit à des surfaces réglées formées avec les droites rencontrant le cercle de l'infini, et dont la courbure est constante. Ce fait s'explique naturellement. La sphère est, comme on sait, une surface réglée à génératrices imaginaires. Les surfaces trouvées par M. Serret sont précisément toutes les surfaces réglées applicables sur la sphère.

Le problème est donc, à notre point de vue, une application particulière de cette question, qu'on sait maintenant résoudre généralement : trouver toutes les surfaces réglées, applicables sur une surface réglée donnée.

Enfin, considérons dans l'espace une courbe gauche quelconque (K), et menons par chaque tangente à la courbe les

plans tangents au cercle (C). On formera ainsi deux développables, dont les deux arêtes de rebroussement seront des lignes de longueur nulle, développées de la courbe (K). Or un calcul des plus simples montre que la recherche des développées se ramène à une équation de Riccati, et comme on connaît deux solutions particulières de cette équation, d'après ce qui précède, nous voyons que le problème sera ramené aux quadratures (¹).

Nous emprunterons un dernier exemple à la théorie des surfaces applicables. On sait que le problème principal de cette théorie consiste dans la détermination de l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. En d'autres termes, étant donnée l'équation différentielle

$$(14)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=A\,du^2+2B\,du\,dv+A'\,dv^2,$$

on demande de déterminer l'une quelconque des coordonnées x, y, z en fonction de u et de v. La méthode suivante, pour former l'équation différentielle du problème, qui nous paraît plus précise et plus générale que les méthodes connues, explique en outre un fait singulier qui a été signalé par Bour. L'équation (14) peut s'écrire

$$dx^2+dy^2=A\,du^2+2B\,du\,dv+A'\,dv^2-dz^2,$$

ou

$$(15)\quad \begin{cases} dx^2+dy^2=\left[A-\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]du^2+2\left(B-\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)du\,dv \\ \qquad\qquad +\left[A'-\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]dv^2. \end{cases}$$

Si donc on suppose z connu et exprimé en u et en v, l'expression contenue dans le second membre de l'équation précédente sera le ds^2 d'une surface développable. Nous

---

(¹) Cette remarque m'a été communiquée par M. O. Bonnet, à qui l'on doit une méthode simple pour la recherche des développées. (Voir BERTRAND, *Calcul différentiel*, § 623.)

n'avons donc qu'à écrire l'équation connue qui exprime que la surface définie par la formule

$$ds^2 = \left[A - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]du^2 + 2\left(B - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)du\,dv + \left[A' - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]dv^2$$

est développable, c'est-à-dire a sa courbure nulle, et nous formerons ainsi l'équation nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire z. Cette équation sera du second ordre.

Bour a remarqué un fait qui, dans sa méthode, restait inexpliqué : c'est que cette équation différentielle du second ordre admet comme *intégrale particulière* l'équation aux différentielles partielles du premier ordre à laquelle se ramène le problème des lignes géodésiques. La méthode suivie explique ce résultat; car, pour trouver les lignes géodésiques, on a à ramener l'expression

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$$

à la forme

$$d\alpha^2 + H\,d\beta^2,$$

et, par suite,

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 - d\alpha^2$$

devant être égal à $H\,d\beta^2$, α devra satisfaire à la même équation différentielle que z, l'expression qui donne la mesure de la courbure devenant nulle quand l'élément ds^2 devient un carré parfait. $H\,d\beta^2$ serait même l'élément d'une développable focale de la nature de celles qui ont été considérées plus haut.

7

Des focales singulières des surfaces.

Quand une surface algébrique contient le cercle de l'infini, il est avantageux de joindre aux focales ordinaires les focales nommées singulières par M. Laguerre. Ces focales sont les

lignes doubles de la développable circonscrite à la surface suivant le cercle (C). La considération de ces focales permet d'énoncer avec précision les théorèmes suivants relatifs aux cônes circonscrits.

Soit un cône circonscrit à une surface. Pour avoir ses focales, il faut lui mener des plans tangents circonscrits au cercle (C). Les lignes d'intersection de ces plans seront les focales du cône. Ces plans sont évidemment les plans tangents aux deux développables focales, ordinaire et singulière, de la surface menés par le sommet du cône. On voit donc que *les focales de tous les cônes circonscrits sont les droites d'intersection des plans tangents aux deux développables focales de la surface menés par le sommet du cône.*

Les droites focales déduites de la focale singulière de la surface peuvent être appelées focales singulières du cône. On voit que le cône circonscrit *est tangent en un certain nombre de points au cercle* (C), et les plans tangents au cône en ces points sont ceux qui se coupent suivant les focales singulières.

Enfin, la définition des focales étant tangentielle (c'est-à-dire n'employant que les plans tangents), les focales d'une courbe quelconque se déterminent comme celles des surfaces : *ce sont les lignes doubles de la développable circonscrite à la courbe et au cercle* (C). Cette développable aura pour lignes doubles la courbe proposée et d'autres courbes qui seront les focales de la première.

On voit que les différentes lignes doubles d'une développable focale sont les focales les unes des autres.

8.

Des propriétés focales des systèmes orthogonaux.

Les développables focales jouent un rôle important dans la théorie des systèmes orthogonaux. J'ai indiqué, dans les travaux antérieurs déjà cités, quelques propriétés focales des systèmes orthogonaux que je me propose d'étendre et de préciser ici.

Soient d'abord *deux systèmes orthogonaux* représentés par une équation unique

$$f(x, y, z, \lambda) = 0,$$

du second degré en λ. L'enveloppe commune de ces deux systèmes est une surface évidemment imaginaire, mais qui est dans tous les cas une développable focale.

En effet, deux plans orthogonaux coupent le plan de l'infini suivant deux droites conjuguées par rapport au cercle (C). Pour que ces deux plans coïncident, il faut donc que leur trace commune sur le plan de l'infini soit tangente au cercle (C). L'enveloppe, ayant tous ses plans tangents au cercle de l'infini, sera donc une développable focale.

C'est ce qu'on peut vérifier pour les systèmes orthogonaux doubles, compris dans une seule équation. Un de ces systèmes, par exemple, peut être défini de la manière suivante. Considérons toutes les surfaces telles que la somme ou la différence des normales menées de leurs points à deux surfaces fixes (S), (S′) soit constante. Ces surfaces forment un système double orthogonal, et les normales en un point M de l'espace aux deux surfaces du système qui y passent sont les bissectrices de l'angle formé par les normales Mm, Mm' aux deux surfaces fixes (S), (S′). Pour que ces deux bissectrices, qui sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux normales Mm, Mm' et au cercle (C), coïncident, il suffit que l'une des deux normales Mm, Mm' aille rencontrer le cercle de l'infini. Donc l'enveloppe des surfaces du système double contient les deux développables focales circonscrites aux deux surfaces fixes.

Un de ces systèmes, formé des surfaces dont l'équation est

$$\sqrt{x^2 + z^2} \pm \sqrt{y^2 + z^2} = \alpha,$$

a été découvert et étudié par M. J.-A. Serret. Les surfaces dont il se compose sont telles que la somme ou la différence des distances d'un de leurs points à deux droites fixes soit constante. Leur enveloppe se compose des deux systèmes de deux plans

passant par les deux droites fixes et tangents au cercle (C). Ces plans sont tangents à chacune des surfaces en tous les points d'une section conique.

Considérons maintenant trois systèmes orthogonaux et supposons que les deux premiers seulement soient représentés par une seule équation; alors, l'enveloppe du système unique, formé par les surfaces des deux premiers systèmes, sera une développable focale. Je dis que *cette développable sera coupée suivant des droites par les surfaces du 3e système*.

En effet, soit M un point de l'enveloppe développable. En ce point passent deux surfaces du système double, tangentes à la développable, et ayant pour normale la génératrice rectiligne de cette développable. Par suite, la troisième surface normale aux deux premières coupera leur enveloppe développable suivant une courbe tangente en chaque point à la génératrice rectiligne. Cette courbe ne peut donc se composer que d'un certain nombre de génératrices rectilignes, et exceptionnellement de l'arête de rebroussement. Donc,

Quand on a trois systèmes de surfaces orthogonales, et que les deux premiers sont compris dans une seule équation, les surfaces des deux premiers systèmes sont, au moins en partie, homofocales; leur enveloppe est une développable coupée suivant des droites par les surfaces du troisième système. Ces droites sont évidemment, sur chaque surface du troisième système, des enveloppes des lignes de courbure de cette surface.

Ces théorèmes s'appliquent *a fortiori* au cas où les trois systèmes orthogonaux sont compris dans une seule équation, comme il arrive pour les surfaces du second degré, et pour les surfaces du quatrième degré que nous étudierons plus loin. Alors toutes les surfaces sont homofocales. Chacune d'elles touche l'enveloppe commune suivant une courbe (qui est une ligne de courbure, intersection avec la surface infiniment voisine), et la coupe suivant plusieurs droites. Les points d'intersection de ces droites sont des ombilics, puisque l'indicatrice de la surface en ces points est un cercle.

Ces propositions sont naturellement sujettes à beaucoup d'exceptions, comme toutes celles qui sont fondées sur la théorie des enveloppes et de la continuité. Aussi ne faut-il pas leur donner une valeur absolue, et, si nous les avons exposées, c'est que le procédé de démonstration qui les donne nous a paru susceptible d'être employé dans les cas où elles sont en défaut, et conduit alors, pour chaque cas particulier, à des remarques rigoureuses et précises. Nous les vérifierons pour un système orthogonal remarquable dans la suite de ce travail. On peut dès à présent reconnaître qu'elles sont exactes pour les surfaces du second degré.

La développable focale circonscrite aux quadriques homofocales est du 8ᵉ ordre. Elle est coupée par chaque plan principal suivant une conique, qui est une courbe double, et suivant 4 droites, qui sont les enveloppes de toutes les sections principales des surfaces homofocales.

Elle touche chaque quadrique suivant une courbe du 4ᵉ ordre, intersection de cette surface, et de la surface homofocale infiniment voisine, elle coupe la quadrique suivant 8 droites se croisant aux 12 ombilics, et ces droites sont l'enveloppe de toutes les lignes de courbure de la quadrique. Ces différents résultats ont été établis par MM. Chasles, Cayley, Cremona dans la géométrie projective.

9.

Des systèmes orthogonaux, et des lignes de courbure sur une surface quelconque.

Quelques-unes des propriétés focales des systèmes orthogonaux dans le plan, découvertes par M. Kummer, s'étendent aussi aux systèmes orthogonaux tracés sur des surfaces continues.

Par exemple, si l'on a sur une surface deux systèmes de lignes orthogonales représentées par une seule équation, ces lignes admettent pour enveloppe une ligne géodésique.

$$ds^2 = 0 .$$

Un des exemples les plus remarquables est fourni par les lignes de courbure et l'on peut démontrer le théorème suivant :

Quand les lignes de courbure ont une enveloppe, cette enveloppe se compose nécessairement de plusieurs lignes droites allant rencontrer le cercle de l'infini, à moins qu'elle ne soit la ligne de courbure singulière, lieu des points où le plan tangent à la surface est tangent au cercle de l'infini.

On sait, en effet, que, pour construire en chaque point M les directions des lignes de courbure, il faut mener les droites conjuguées à la fois par rapport au couple de tangentes principales et par rapport au cercle de l'infini ou aux deux droites qui joignent le point M aux deux points du cercle de l'infini situés dans le plan tangent. Les deux directions des lignes de courbure ne viennent donc se confondre que si une des tangentes principales au point M va rencontrer le cercle (C). Donc, si les lignes de courbure ont une enveloppe, cette enveloppe sera à la fois une ligne asymptotique et une ligne géodésique $ds^2 = 0$. Il faudra donc que son plan osculateur soit à la fois tangent et normal à la surface. Cela ne peut arriver que de deux manières différentes :

1° Si le plan osculateur est indéterminé, alors l'enveloppe est une ligne droite;

2° Si le plan tangent est aussi normal à la surface, et, dans ce second cas, il faudra que l'enveloppe coïncide avec la courbe de contact de la développable focale circonscrite à la surface. Cette courbe de contact devra être une ligne $ds^2 = 0$.

Il ne faut pas oublier, dans l'application de ce théorème,

que généralement il n'y a pas d'enveloppe pour le système des 2 lignes de courbure (¹).

10.

Des foyers des courbes sphériques et de la transformation par rayons vecteurs réciproques des focales.

Les focales des courbes sphériques se définissent comme celles de toutes les autres courbes. Mais on peut aussi définir directement les foyers d'une courbe *située sur la sphère* sans sortir de cette surface, et par la considération de ses génératrices rectilignes.

Étant donnée une courbe sphérique (G), menons les génératrices rectilignes des deux systèmes qui lui sont tangentes. Ces génératrices formeront évidemment deux faisceaux dont les points d'intersection seront les foyers de la courbe. Ces points pourront, en effet, être considérés comme des cercles de rayon nul doublement tangents à la courbe, et ils seront à l'intersection de la focale complète, et de la sphère qui contient la courbe (G). Ils resteront les foyers, quand on effectuera une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Plus généralement, les développables focales se transforment, nous l'avons vu, en développables focales, et par suite les transformées des focales seront les focales de la nouvelle surface. Ce théorème s'applique évidemment aux courbes et aux surfaces.

(¹) Voir à ce sujet deux notes de l'auteur dans les *Comptes rendus* de 1870 sur les solutions singulières des équations différentielles, et des observations de M. Catalan, publiées dans le même Recueil. Depuis la publication de ces Notes, M. Moutard a bien voulu me rappeler que, dans une conversation particulière, il m'avait indiqué, ce dont je n'avais nul souvenir, que les lignes de courbure n'ont pas en général d'enveloppe. C'est, comme on voit, un cas particulier important de la proposition générale que j'ai signalée.

Soit donné, par exemple, un cercle (H). Les plans tangents à ce cercle et au cercle de l'infini enveloppent deux cônes, qui sont les sphères de rayon nul, passant par le cercle. Soient O, O′ les centres de ces sphères, qui tiennent lieu de la focale du cercle. Le système formé du cercle et des deux points O, O′ sur son axe demeurera invariable par toute transformation par rayons vecteurs réciproques. Les focales d'un cône contenant le cercle et ayant un point M pour sommet seront les droites MO, MO′, etc. [1].

Nous terminerons ici cette étude sur les focales, que le lecteur aura peut-être trouvée trop longue. Il nous a semblé que, les imaginaires ayant été nettement introduites en géométrie, il convenait d'en faire une analyse détaillée dans toutes les questions où on les rencontre.

Nous espérons que les exemples déjà donnés, et ceux que nous développerons dans la troisième partie de ce travail, montreront qu'il y a avantage à préciser et à développer les notions admises implicitement par un très grand nombre de géomètres.

---

[1] Ce système, qui a été considéré par MM. Chasles, Cayley, Laguerre, etc., donne lieu à plusieurs propriétés. J'en ai signalé quelques-unes dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* pour 1870, t. I, 2e série.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude d'une classe remarquable de courbes du 4e ordre.

11.

Introduction. — Définition des courbes à étudier.

Les courbes dont nous allons essayer de faire une théorie sont les courbes du 4e ordre qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface quelconque du second degré, et les courbes planes qui se déduisent de celles-ci au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Ces courbes sont très importantes; on les rencontre dans un grand nombre de questions. Peut-être n'avait-on pas étudié d'une manière complète leurs propriétés métriques et focales, quand j'ai donné, dans les *Comptes Rendus* et dans les *Nouvelles Annales* de 1864, quelques théorèmes généraux qui s'appliquent à toutes ces courbes, et qui les rapprochent, par leurs propriétés focales, des courbes du second degré.

Le plus important de ces théorèmes consiste dans la détermination de leurs focales, et dans les *propriétés métriques* de ces focales, qui constituent une généralisation du beau théorème de M. Dupin sur les coniques focales ou excentriques Depuis 1864, elles ont été étudiées par un grand nombre de géomètres, MM. de la Gournerie, Laguerre, Moutard, etc. On pourra consulter pour l'historique de la question un Mémoire de M. de la Gournerie, inséré en 1869 dans le *Journal de Liouville*. Elles ont fait aussi l'objet des recherches de plusieurs géomètres anglais, au nombre desquels je citerai MM. Casey,

Cayley, Crofton, Sylvester. Auparavant, elles avaient été étudiées par MM. Van Rees, Quetelet, Chasles, Dandelin, etc., sous le nom de *spiriques*. Quelques-unes d'entre elles ont même été considérées par les anciens géomètres. On voit que l'historique des recherches relatives à ces courbes est une tâche ardue et délicate. Je me contenterai de citer les travaux dont je me serai inspiré ou que je connaîtrai. S'il y a lieu, une note placée à la fin du Mémoire contiendra une liste des Mémoires et des travaux se rapportant à ces courbes, que j'appellerai *cycliques* dans la suite de ce travail. Il y aura donc les cycliques planes et les cycliques sphériques. Les premières étant les transformées des secondes, c'est des courbes sphériques que je m'occuperai d'abord et d'une manière plus complète.

Il ne sera peut-être pas inutile, pour donner une idée de l'intérêt qui s'attache à ces courbes, d'en signaler plusieurs d'une espèce particulière. Les cycliques planes comprennent la *cubique circulaire*, la *focale à nœud*, les *ovales de Descartes*, la *cissoïde*, la *lemniscate*, l'*ellipse de Cassini*, les *podaires* ou *réciproques de coniques*, les *sections planes du tore ou spiriques*, le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une conique, etc.

Les cycliques sphériques comprennent les *coniques sphériques*, la *fenêtre de Viviani*, les courbes employées par M. William Roberts pour la représentation des fonctions elliptiques; les sections sphériques du tore, de la cyclide de M. Dupin, de toutes les surfaces du 4e ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double, et en particulier des podaires ou transformées par rayons vecteurs réciproques des surfaces du second ordre.

12.

Étude des cycliques sphériques.

On sait que, par l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré, on peut toujours faire passer quatre cônes réels ou imaginaires, distincts ou confondus.

Dans le cas que nous avons à examiner, deux de ces cônes au moins sont toujours réels. On pourra donc substituer à la surface du second degré un cône réel.

En effet, les sommets des quatre cônes, passant par l'intersection des deux surfaces, forment un tétraèdre conjugué, commun à la surface et à la sphère. Si l'un des sommets est imaginaire, il y aura un autre sommet imaginaire, conjugué du premier, et la droite passant par ces deux sommets sera réelle. On peut donc toujours placer les quatre sommets sur deux droites réelles, qui sont polaires l'une de l'autre dans la sphère.

Une de ces deux droites ne rencontre donc pas la sphère; prenons sur cette droite les deux points qui divisent harmoniquement les deux segments qu'elle intercepte dans la sphère et dans la quadrique. L'un des deux segments, celui qui est intercepté dans la sphère, étant imaginaire, les deux points seront toujours réels, et seront les sommets de deux cônes réels (quand la courbe sera réelle) passant par la courbe. Ces deux sommets seront évidemment extérieurs à la sphère.

Donc, *par la courbe d'intersection de la sphère et de la surface passent quatre cônes. Deux de ces cônes au moins sont réels quand la courbe est réelle, et ont leurs sommets extérieurs à la sphère.*

Mais il est nécessaire d'examiner cette question d'une manière plus complète, afin d'avoir une idée plus précise des formes qu'affectent les cycliques dans tous les cas possibles.

On sait que les quatre cônes passant par l'intersection de deux surfaces quelconques du second degré se déterminent par la résolution d'une équation du 4e degré. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868-69, M. Painvin a repris l'étude de cette équation, et il a examiné d'une manière détaillée les différentes formes de la courbe d'intersection, le nombre de cônes réels, la réalité de la courbe dans les différents cas. On peut ajouter aux résultats obtenus par ce géomètre les suivants, que nous donnerons ici sans démonstration. Nous nous bornerons au cas où l'équation du 4e degré a ses racines *distinctes*.

Si cette équation a ses quatre racines réelles, deux des quatre cônes au moins sont réels (voir le Mémoire cité). Il ne peut donc se présenter que les deux cas suivants :

1° Les quatre cônes sont réels, et alors la courbe est réelle. Nous ajoutons qu'*elle se compose de deux branches*. C'est le cas d'*arrachement*.

2° Deux cônes seulement sont réels. La courbe est entièrement imaginaire.

Si deux racines seulement sont réelles, alors les deux cônes ayant leurs sommets réels sont réels ; les deux autres sont imaginaires. Nous ajoutons que, dans ce cas, *la courbe se compose d'une seule branche*. Il y a *pénétration* des deux surfaces.

Enfin, si les 4 racines sont imaginaires, d'après M. Painvin, la courbe est toujours réelle ; mais on peut remarquer de plus qu'elle *se compose de deux branches distinctes*.

En résumé, nous voyons que le tétraèdre conjugué commun a toujours deux arêtes réelles. Quand deux seulement de ses sommets sont réels, il y a pénétration. Quand les quatre sommets sont imaginaires, on a une courbe réelle à deux branches distinctes. Enfin, quand les quatre sommets sont réels, la courbe se compose de deux branches réelles distinctes, ou est entièrement imaginaire.

Ainsi, dans les deux cas où les quatre cônes sont tous réels ou tous imaginaires, la courbe se compose de deux branches distinctes. On peut cependant effectuer une distinction géométrique très importante entre ces deux cas. Quand les quatre cônes sont imaginaires, la courbe réelle d'intersection se compose de *deux branches coupées chacune en un nombre impair* (1 *ou* 3) *de points par un plan quelconque*. Au contraire, quand les cônes sont réels, *chacune des branches est coupée par un plan en un nombre pair* (0, 2, 4) *de points*.

On voit que la courbe d'intersection, dans le cas où les 4 cônes sont imaginaires, possède les propriétés de la cubique gauche, complétée au moyen d'une de ses sécantes (elle se réduit, en effet, à l'ensemble de ces deux lignes quand les

deux racines qui étaient imaginaires deviennent égales). Dans ce cas d'ailleurs toutes les surfaces passant par la courbe sont des hyperboloïdes, tout plan, et en particulier le plan de l'infini, coupe la courbe au moins en deux points, au plus en quatre points.

Revenons au cas particulier que nous avons à examiner et où l'une des surfaces est une sphère, deux cônes seront toujours réels; on ne peut donc faire que les hypothèses suivantes :

1° Les quatre cônes sont réels, la courbe sera réelle, et composée de deux branches coupées chacune par un plan en un nombre pair de points;

2° Les sommets des quatre cônes sont réels et deux des cônes seulement réels, la courbe sera imaginaire;

3° Le tétraèdre conjugué a deux sommets réels et deux imaginaires, la courbe se composera d'une seule branche.

13.

De la génération des cycliques [1].

Nous désignerons par (D), (D_1), (D_2), (D_3) les quatre cônes contenant la courbe, par a, a_1, a_2, a_3 leurs sommets respectifs. Si l'on mène tous les plans tangents au cône (D) par exemple, ces plans tangents coupent la sphère suivant des cercles dont l'enveloppe est la courbe que nous étudions. Tous ces cercles coupent évidemment à angle droit un cercle fixe de la sphère, le *cercle de contact* du cône circonscrit à la sphère et ayant le point a pour sommet. Donc, la cyclique peut être considérée comme l'enveloppe de cercles sphériques orthogonaux à un cercle fixe, et, pour déterminer ce système de cercles, il suffira de

---

[1] On pourra consulter, sur cette question, différentes communications importantes de MM. Moutard, Laguerre, Mannheim, dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, dans le *Journal de Liouville*, et les travaux de l'auteur dans les *Nouvelles Annales* de 1864 et dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, t. II, III et IV.

trouver le lieu de leurs pôles ou centres sphériques. Or ces pôles sphériques sont à l'intersection de la sphère et des perpendiculaires abaissées du centre de la sphère sur les plans tangents. Ils sont donc à l'intersection de la sphère, et du cône supplémentaire du cône (D) mené par le centre O de la sphère. Le lieu des pôles de ces cercles est donc une conique sphérique (K). Nous désignerons de même par (K_1), (K_2), (K_3), les 3 autres coniques correspondant aux cônes (D_1), (D_2), (D_3). Donc :

Une cyclique peut être considérée, et de 4 manières différentes, comme l'enveloppe de cercles orthogonaux à un cercle sphérique et ayant leurs pôles sur une conique sphérique.

Les cycliques ont une propriété très importante. Elles demeurent, sous certaines conditions, invariables par une transformation par rayons vecteurs réciproques. Si l'on prend, en effet, pour pôle de la transformation le sommet de l'un des quatre cônes, *a* par exemple, et pour module de la transformation la tangente menée de ce point à la sphère, le cône et la sphère ne seront pas changés, et par conséquent leur courbe d'intersection demeurera aussi invariable. Les cycliques sont donc sur la sphère des courbes planes analogues aux courbes nommées *anallagmatiques* par M. Moutard, et qui ont la propriété de se transformer en elles-mêmes quand on emploie une transformation par rayons vecteurs réciproques convenablement choisie.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques, en prenant un pôle et un module quelconques, la cyclique se transforme en une autre cyclique. En effet, la sphère se transforme en une sphère, la surface du second degré se transforme en une surface du 4e ordre, ayant le cercle de l'infini pour ligne double. Or on sait que les sections sphériques d'une telle surface peuvent toujours être placées sur un cône du second degré.

Cependant, si le pôle est placé sur la sphère qui contient la cyclique, celle-ci se transforme, si le pôle n'est pas sur la

cyclique, en une courbe plane du 4e ordre, ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle. En effet, soit α le pôle choisi. Les deux génératrices de la sphère passant en α coupent la courbe en quatre points m, n, m_1, n_1, qui sont rejetés à l'infini sur les cercles du plan; et d'ailleurs, tout cercle du plan, étant la perspective d'un cercle de la sphère, coupera la courbe plane en quatre points seulement.

Si on prenait le pôle α sur la courbe, la projection stéréographique de la cyclique serait une *cubique circulaire,* c'est-à-dire une courbe du 3e degré passant par les deux points à l'infini sur le cercle.

Réciproquement, toute courbe plane des deux espèces indiquées est coupée en 4 points seulement par un cercle, et par conséquent est la réciproque d'une cyclique sphérique, intersection de la sphère et d'un cône du second degré.

14.

Classification des cycliques.

La classification des courbes précédentes dérive naturellement de leur mode de génération.

1° Le cône peut être doublement tangent à la sphère; alors la cyclique se compose de deux cercles.

2° Le cône peut être simplement tangent; alors le point de contact a est un point double de la cyclique. On sait que dans ce cas un des cônes passant par la courbe compte pour deux, et a son sommet au point a. Prenons ce point pour pôle, et faisons la projection stéréographique de la courbe. Nous obtiendrons évidemment une conique plane. Donc *la cyclique à point double est une transformée par rayons vecteurs réciproques de conique plane.*

3° On peut encore établir des divisions d'après la nature des points d'intersection de la courbe ou du cône avec le cercle de l'infini.

Si le cône est doublement tangent au cercle de l'infini, il sera de révolution; la conique (K) sera un cercle, les autres coniques (K_1), (K_2), (K_3) seront des cercles, que nous reconnaîtrons être concentriques au premier. La cyclique sera donc l'enveloppe d'un petit cercle orthogonal à un cercle fixe, et dont le pôle décrit un autre petit cercle. Elle sera doublement tangente au cercle de l'infini. Nous l'appellerons dans ce cas une *cartésienne;* elle se rattache en effet par les analogies les plus étroites aux ovales de Descartes.

4° Enfin la cyclique la plus générale est l'intersection d'un cône quelconque et de la sphère. On pourra distinguer dans cette classe comme dans les précédentes les courbes par lesquelles passent un, deux, ou trois cylindres.

Dans le plan, les divisions se font de la même manière. On a :

1° Les *réciproques* ou *podaires de coniques ;*

2° Les *ovales de Descartes,* qui ont deux points de rebroussement à l'infini ;

3° La cyclique du 3e degré ou *cubique circulaire ;*

4° La cyclique générale.

D'autres divisions se présenteront naturellement dans la suite.

15.

Propriétés générales des cycliques.

Puisque les cycliques sphériques sont l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré, leurs propriétés pourront se déduire de celles des surfaces du second degré.

Par exemple, considérons deux points m, n de la cyclique. On peut toujours par la cyclique faire passer une surface du second degré qui ait la droite mn pour génératrice rectiligne. Tout plan passant par mn sera tangent à cette surface et la coupera suivant une autre génératrice, sur laquelle seront deux points m', n' de la courbe. D'ailleurs, les quatre points m, n,

m', n', étant dans un plan, se trouveront sur un petit cercle de la sphère. D'autre part, le plan, passant par $m'n'$ et par le centre de la sphère sera tangent à la surface du second degré, et enveloppera un cône circonscrit à la surface. Donc,

Si, par deux points quelconques de la cyclique, on fait passer un petit cercle, ce petit cercle coupera la cyclique en deux autres points, et l'arc de grand cercle qui joint ces deux points enveloppera sur la sphère une conique sphérique.

Il est aisé de voir que cette conique sphérique sera tangente en quatre points à la cyclique proposée. En faisant varier les points m, n, on aura une suite simplement infinie de coniques sphériques inscrites dans la courbe.

On démontrerait de même que si, par les deux points m', n', définis plus haut, on fait passer un petit cercle coupant à angle droit un cercle fixe, ce cercle variable enveloppera une cyclide.

Prenons, sur l'une des surfaces réglées contenant la courbe, quatre génératrices formant un quadrilatère gauche. Ces quatre génératrices coupent la cyclique en 8 points qui sont 4 à 4 en des plans et par conséquent sur de petits cercles. Nous obtenons donc la proposition suivante :

Si on coupe une cyclique par un cercle quelconque, que par deux des quatre points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles iront couper la cyclique en quatre points nouveaux situés sur un cercle.

Cette propriété très générale s'étend naturellement aux cyclides planes, qu'on peut déduire de leurs analogues sur la sphère, en augmentant indéfiniment le rayon de cette sphère. Les théorèmes précédents pourraient être beaucoup étendus. Nous allons passer à une autre question.

16.

Des relations entre les différents modes de génération d'une cyclique.

Nous avons vu qu'une cyclique peut être considérée de quatre manières différentes comme l'enveloppe de petits cercles ayant

leurs centres sphériques sur une conique (K), et coupant à angle droit un cercle (A). Nous désignerons par (K), (K_1), (K_2), (K_3) les quatre coniques auxquelles nous donnerons, à l'exemple de M. de la Gournerie, le nom de coniques *déférentes*, et par (A), (A_1), (A_2), (A_3) les cercles correspondants que nous appellerons cercles *directeurs*.

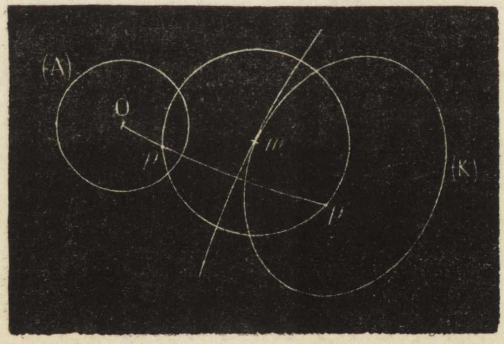
Les coniques (K_i) sont à l'intersection de la sphère et des quatre cônes qui ont leurs sommets au centre de la sphère, et qui sont supplémentaires des quatre cônes (D), (D_1), (D_2), (D_3) passant par la cyclique. Ces quatre cônes (D_i), coupant le cercle de l'infini au même point, sont homocycliques; *les quatre coniques* (K_i) *sont donc homofocales*.

Les quatre cercles (A_i) étant dans les faces d'un tétraèdre conjugué à la sphère seront *orthogonaux deux à deux*.

Mais pour mieux approfondir les relations de ces différents modes de génération, nous allons résoudre le problème suivant :

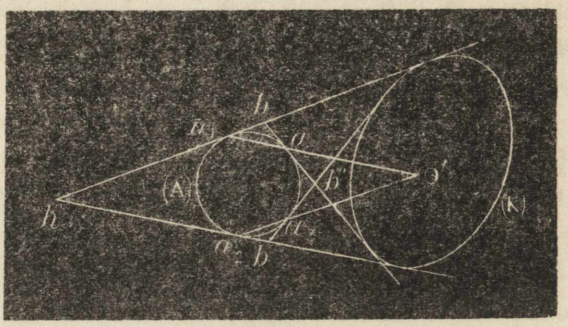
Un mode de génération étant connu, c'est-à-dire une conique déférente et le cercle directeur correspondant étant donnés, trouver les trois autres modes de génération.

A cet effet, soient donnés la conique (K), le cercle directeur (A), et prenons un des cercles mobiles, ayant son centre en m, et orthogonal au cercle (A).



L'axe radical de ce cercle et du cercle infiniment voisin ira passer au point O, centre du cercle (A). La position-limite de cet axe, perpendiculaire à la ligne des centres, sera donc l'arc

de grand cercle Opp' mené par le point O perpendiculairement à l'arc tangent en m. Les deux points de contact du cercle avec son enveloppe seront p, p'.



Ces deux points de contact viennent se confondre quand l'arc tangent en m devient tangent au cercle (A). La cyclique coupera donc le cercle directeur (A) aux quatre points de contact a, a_1, a_2, a_3 des arcs tangents communs au cercle et à la conique, et elle coupera ce cercle directeur à angle droit.

Il résulte de là que si, des points b, b' comme pôles, on décrit deux cercles passant le premier en a, a_1, le second en a_2, a_3, ces deux cercles seront doublement tangents à la cyclique et appartiendront évidemment à un même mode de génération. Les deux arcs aa_1, a_2a_3 iront donc se couper au pôle du nouveau cercle directeur en O'. Ce cercle directeur est donc déterminé, puisqu'on connaît son pôle, et qu'il est orthogonal au cercle (A). Appelons-le (A_1), et remarquons que son centre O' a même polaire dans le cercle et dans la conique.

La conique (K_1) correspondante doit être homofocale à la conique (K), et passer par les points b, b'. Elle est donc aussi déterminée. On connaît même ses tangentes en b, b', qui sont les bissectrices des angles b, b' du quadrilatère.

On voit que nous rencontrons ici, sans avoir à le démontrer, un des plus beaux théorèmes de M. Chasles sur les coniques sphériques :

Si l'on mène les quatre arcs de grand cercle tangents à une conique sphérique et à un petit cercle, les sommets opposés du

quadrilatère formé par ces arcs tangents sont sur une conique, homofocale à la proposée.

Comme on a six sommets qu'on peut grouper deux à deux de trois manières différentes, nous obtiendrons bien les trois nouveaux modes de génération. Nous apercevons de plus une relation de réciprocité remarquable entre les quatre cercles (A_i) et les coniques correspondantes. Étant donnée une quelconque des quatre coniques, les trois autres s'en déduisent toujours par les mêmes constructions géométriques.

Remarquons qu'étant donnés une des coniques (K_i) et le cercle (A_i), les centres des trois autres cercles sont les sommets du triangle conjugué commun au cercle et à la conique.

Au point de vue de la réalité des différents éléments, il y a deux cas à distinguer, quand la courbe est réelle.

Quand deux cônes réels seulement passeront par cette courbe, les deux modes de génération correspondants seront formés d'une conique et d'un cercle réel. Cette conique et ce cercle se couperont en deux points réels et auront deux tangentes réelles; les deux autres modes de génération seront entièrement imaginaires, les coniques et les centres des cercles correspondants étant imaginaires. C'est le cas de la cyclique à une seule branche.

Au contraire, si les quatre cônes passant par la courbe sont réels, les quatre modes de génération seront réels. Une des coniques (A_i) sera coupée en quatre points réels par le cercle (K_i); les trois autres coniques n'auront aucun point commun avec le cercle qui leur associé. Ces conclusions résultent d'un examen ne présentant aucune difficulté.

17.

Des différents modes de génération pour les diverses espèces de cycliques.

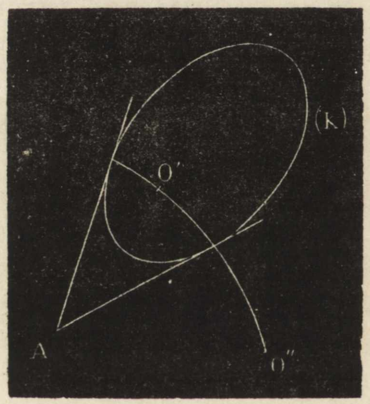
L'examen des cas particuliers de la construction précédente conduit naturellement aux diverses espèces de cycliques.

Supposons d'abord que le cercle (A) se réduise à un point. Alors les petits cercles, ayant leur centre sur la conique (K), passeront par le point fixe A, et leurs points de contact avec l'enveloppe s'obtiendront en prenant les symétriques du point A, par rapport à toutes les tangentes de la conique (K).

Donc, si l'on double les arcs vecteurs menés du point double d'une podaire de conique à un point quelconque de cette podaire, on obtient une cyclique ayant même point double que la podaire.

La podaire elle-même est-elle une cyclique? On peut s'assurer que c'est une courbe généralement plus compliquée.

Les autres modes de génération de notre cyclique se détermineront de la manière suivante. Les trois points ayant même polaire dans le cercle de rayon nul A et dans la conique,



sont le point A et deux points O', O'', situés sur l'arc polaire de A. Des six sommets du quadrilatère, quatre se confondent en A. Les modes de génération sont déterminés de la manière suivante :

1° Une des coniques passant en A et homofocales à (K), ayant pour normale AO', et le cercle décrit de O' comme pôle avec AO' pour rayon;

2° L'autre conique passant en A, ayant pour normale AO'', et le cercle décrit de O'' comme pôle et tangent en A à la conique;

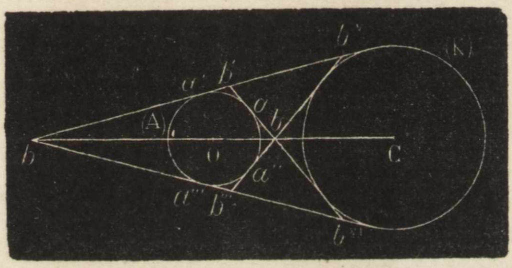
3° et 4° Le premier mode de génération comptant pour deux. On obtient ainsi une cyclique à point double, réciproque de conique plane, ou podaire de cône, toutes les fois que le cercle directeur se réduit à un point ou devient tangent à la conique déférente correspondante.

18.

Des cartésiennes.

Dans ce cas, le cône (D) étant de révolution, chaque conique (K) est un cercle, et tous ces cercles ont pour pôle le point où l'axe de révolution mené par le centre de la sphère perce la sphère. C'est ce qu'on va reconnaître par l'application de la construction générale.

Construisons le quadrilatère circonscrit au petit cercle (K) et au cercle (A). La conique (K_1), homofocale à (K) et passant



par b', b'', n'est autre chose que le cercle de centre C passant par ces 2 points. Le cercle directeur (A) correspondant aura son centre sur la ligne OC, au point d'intersection de aa' et de $a''a'''$.

De même, la conique (K_2) sera le cercle de centre C passant par b'', b''', et le cercle (A_2) correspondant aura son centre au point d'intersection de aa'', $a'a''$ sur OC. Mais la conique (K_3), passant par b et b'', se réduit à l'arc de grand cercle bb''OC. Le cercle directeur (A_3) correspondant se réduit à ce même arc de grand cercle. Il y a donc un mode de génération qui

devient illusoire. Il se présente ici une indétermination, que nous lèverons en parlant des courbes d'intersection d'un cylindre et de la sphère. Toute cartésienne, en effet, a un plan de symétrie, qui passe par l'axe du cône et le centre de la sphère. Elle se trouve donc sur un cylindre parabolique, ayant son axe perpendiculaire à ce plan de symétrie.

Cette indétermination se présente dans le cas général, toutes les fois que deux sommets opposés du quadrilatère par lesquels doit passer une courbe homofocale à la proposée se trouvent sur l'axe focal. On voit bien d'ailleurs que, toutes les fois que la cyclique sera sur un cylindre, les plans tangents au cylindre couperont la sphère suivant des petits cercles ayant leurs pôles sur un grand cercle, celui auquel ils doivent être orthogonaux. La génération indiquée ne peut donc ici nous servir.

19.

Des propriétés focales des cycliques.

Nous avons vu, dans la *Première Partie* de ce travail, que le foyer d'une courbe sphérique peut être considéré comme un cercle de rayon nul, doublement tangent à la courbe. Comme nous avons trouve les quatre séries de cercles doublement tangents à la cyclique, il suffira d'examiner ceux de ces cercles dont le rayon devient nul.

Considérons l'un quelconque des cônes (D') par lesquels passe la cyclique. Tous les plans tangents à l'un de ces cônes coupent la sphère, nous l'avons vu, suivant des cercles doublement tangents à la cyclique. Donc les plans tangents au cône et à la sphère couperont la sphère suivant des cercles de rayon nul, doublement tangents à la courbe; ce seront les foyers. Ces foyers seront à la fois sur le cercle directeur (A_1) et sur la conique déférente (K_1). Cela résulte aussi de la génération de la courbe au moyen des éléments (A_1), (K_1).

On a quatre foyers sur chaque cercle directeur, en tout

16 foyers. Il est clair que ces foyers sont les 16 points d'intersection de deux faisceaux formés avec quatre génératrices de système différent.

En effet, si l'on considère les p génératrices d'un même système de la sphère, tangentes à la courbe, il y en aura p imaginaires conjuguées, de l'autre système, tangentes aussi à la courbe. Ces droites donneront par leur intersection p^2 points, qui seront des foyers. Ici $p=4$. Cela indique d'ailleurs une nouvelle relation entre les quatre coniques (K_i) et les quatre cercles (A_i). Les quatre points d'intersection des coniques et des cercles correspondants sont situés sur quatre droites de deux manières différentes.

Il est clair, d'après ce qui précède, que quatre foyers seulement pourront être réels. Mais, 1° dans le cas où la cyclique aura une seule branche, deux des foyers réels seront sur un cercle (A_1), les deux autres sur un autre cercle (A_2); 2° dans le cas où la cyclique aura deux branches, les quatre foyers réels seront sur un même cercle. Cette distinction, qui résulte de l'art. 12, devait être faite ici.

Les foyers jouissent de plusieurs propriétés remarquables, qu'on déduit du théorème de Poncelet. Voici le principe très simple qui conduit à ces relations.

Soit une sphère, et menons-lui un plan tangent en A. Pour tout point M de cette sphère, le carré de la distance au point A sera proportionnel à la distance du même point M au plan tangent en A. On aura, en appelant p cette distance au plan tangent,

$$(17) \qquad \overline{AM}^2 = r^2 = 2ap.$$

Plus généralement, si l'on prend un plan (P) et une sphère (S′) passant par le cercle de la première sphère situé dans le plan (P), il y aura, pour tout point M de la première sphère, un rapport constant entre le carré t^2 de la tangente menée de M à (S′) et la distance p du même point M au plan (P). On aura

$$(18) \qquad t^2 = 2a'p.$$

Ces remarques, extrêmement simples, suffisent pour la démonstration des théorèmes que nous avons en vue.

Considérons d'abord trois plans tangents communs au cône (D) et à la sphère. Ces plans toucheront la sphère en trois foyers situés sur un même cercle directeur (A), et en appelant P, P', P'' les premiers membres des équations de ces trois plans, on aura, pour l'équation du cône,

$$\lambda\sqrt{P} + \mu\sqrt{P'} + \nu\sqrt{P''} = 0. \tag{19}$$

Pour tous les points de la courbe d'intersection, et d'après la formule (17), on pourra remplacer $\sqrt{P}$, $\sqrt{P'}$, $\sqrt{P''}$ par r, r', r'', ces dernières quantités représentant les distances d'un point de la cyclique aux trois foyers. On aura donc

$$\lambda r + \mu r' + \nu r'' = 0. \tag{20}$$

Il existe donc une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point de la courbe à trois foyers situés sur un même cercle directeur.

Soient P, P', deux des plans tangents communs au cône (D) et à la sphère, et Q le plan de contact dans le cône. L'équation du cône sera

$$PP' = Q^2.$$

D'ailleurs, les trois plans P, P', Q coupent la sphère suivant trois cercles orthogonaux au cercle directeur (A), et si, par ces trois cercles, on fait passer trois sphères fixes, mais quelconques, en appelant t, t', T les tangentes menées à ces trois sphères d'un point de la courbe, on aura, d'après l'équation (20),

$$Ktt' = T^2.$$

Les sphères t, t' sont doublement tangentes à la courbe, et leurs quatre points de contact sont sur la sphère T.

En général, si une surface *quelconque* passant par la courbe est définie par une équation de la forme

$$f(P, P', P'', \ldots) = 0,$$

on pourra, par tous les points de la cyclique, remplacer

$P, P', P'', \ldots$ par des quantités proportionnelles aux carrés $t^2, t'^2, \ldots$ des tangentes à des sphères fixes menées par l'intersection de la sphère et des plans $P, P', \ldots$ L'équation sera

$$f(at^2, a't'^2, a''t''^2, \ldots) = 0,$$

$a, a', a'', \ldots$ étant des constantes dont la détermination n'offre aucune difficulté.

Par exemple, prenons trois plans tangents quelconques au cône (D) contenant la cyclique. L'équation du cône sera

$$a\sqrt{P} + b\sqrt{P'} + c\sqrt{P''} = 0,$$

et, par suite, on aura pour la courbe une équation de la forme

$$(21) \qquad \lambda t + \mu t' + \nu t'' = 0,$$

entre les tangentes t, t', t'' à trois sphères d'une même série doublement tangentes à la courbe.

Donc *il y a une relation linéaire et homogène entre les longueurs des tangentes menées d'un point de la courbe à trois sphères doublement tangentes à la cyclique et appartenant à la même série.*

Cherchons celles des sphères doublement tangentes qui se réduisent à des points. Leur ensemble constituera une focale de la cyclique proposée.

Les centres de toutes ces sphères sont évidemment sur les perpendiculaires abaissées du centre de la sphère (S) contenant la cyclique sur les plans tangents du cône (D), c'est-à-dire ces centres sont sur le cône (E) supplémentaire de (D), ayant son sommet au centre O de la sphère (S) contenant la cyclique. D'ailleurs, le centre radical commun de toutes les sphères doublement tangentes est le sommet O′ du cône (D); elles sont orthogonales à la sphère (S′) décrite de ce point O′ comme centre et coupant la sphère (S) à angle droit. Pour qu'elles se réduisent à des points, il faut que leurs centres soient sur la sphère (S′), et par conséquent sur la courbe de

rencontre de cette sphère (S′) et du cône (E). Nous avons donc une focale de la cyclique, et cette focale est elle-même une cyclique. D'ailleurs la relation entre les deux courbes est évidemment réciproque; les sphères qui les contiennent sont orthogonales, et les cônes ayant leurs sommets au centre de chaque sphère, supplémentaires. Il y a donc réciprocité entre les deux courbes. *Chacune d'elles est la focale de l'autre*, ce qui justifie la proposition générale énoncée dans la *Première Partie* de ce travail. Aux quatre modes de génération ou quatre cônes (D_i) correspondront quatre focales situées sur des sphères ayant leurs centres aux sommets des cônes et orthogonales entre elles. Nous avons ainsi un système de cinq cycliques focales les unes des autres et situées sur cinq sphères orthogonales.

Ainsi, *étant donnée une cyclique sphérique, cette cyclique a quatre focales, qui sont des courbes de même espèce, situées sur quatre sphères orthogonales entre elles et à la sphère contenant la cyclique, ayant leurs centres aux sommets des quatre cônes contenant la cyclique et coupant la sphère qui contient cette courbe suivant les quatre cercles directeurs.*

Dans le cas où la cyclique primitive se composera de deux branches, les sommets des quatre cônes seront réels. Un seul sera intérieur à la sphère contenant la cyclique, et par conséquent trois des quatre sphères contenant les focales seront réelles. Quant aux focales elles-mêmes, une seulement sera réelle.

Au contraire, dans le cas où la cyclique se compose d'une seule branche, il n'y a que deux sphères réelles orthogonales à la proposée; ces deux sphères contiennent chacune une focale réelle de la proposée.

En résumé, on n'a que deux systèmes : l'un pour lequel quatre sphères et deux focales sont réelles, l'autre pour lequel trois sphères sont réelles et contiennent chacune une focale.

Les cinq focales, réelles ou imaginaires que nous venons de rencontrer, sont les lignes doubles d'une développable focale que nous étudierons dans la suite de ce travail.

Si nous nous reportons à l'équation (21), et que nous prenions sur une (C) des cinq focales trois points *quelconques*, ces trois points pouvant être considérés comme des sphères de rayon nul tangentes à toute autre des cinq cycliques (C'), il y aura entre les distances d'un point quelconque de (C') aux trois points choisis sur (C) une relation de la forme

$$ar + a'r' + a''r'' = 0 . \tag{22}$$

Les coefficients a, a', a'' changent d'ailleurs, et avec la cyclique (C') et aussi quand on change les trois foyers fixes pris sur (C). Ainsi,

Étant donnée l'une quelconque (C) *des cinq focales, trois points quelconques pris sur cette focale seront des foyers des autres courbes et posséderont les propriétés métriques exprimées par l'équation* (22); *c'est-à-dire qu'il y aura entre les distances d'un point variable de l'une quelconque des quatre autres courbes* (C') *aux trois points choisis sur* (C) *une relation linéaire et homogène de la forme*

$$ar + br' + cr'' = 0 .$$

Le théorème précédent correspond évidemment dans la théorie des cycliques à celui de M. Dupin sur les coniques focales.

La relation métrique que nous venons de rencontrer est d'une forme moins simple que celle qui se rapporte aux foyers d'une courbe du second degré. Cependant, elle se prête à la généralisation d'un théorème relatif aux coniques planes ou sphériques.

On sait qu'étant donnés deux points A, B sur une conique de foyers F, F', réciproquement A et B peuvent être pris comme foyers d'une conique passant par F et F'. On peut étendre ce théorème aux cycliques planes et sphériques.

Étant donnés trois points A, B, C *sur une cyclique de foyers* F, F', F'', *on peut prendre ces trois points* A, B, C *pour foyers d'une cyclique qui contiendra les trois points* F, F', F''.

Appelons, en effet, R_a, R_b, R_c les distances des points

A , B , C au foyer F, et désignons par les mêmes lettres accentuées les distances aux foyers F′, F″. Puisque les trois points A , B , C sont sur une cyclique de foyers F , F′, F″, on aura trois relations de la forme :

$$\lambda R_a + \mu R'_a + \nu R''_a = 0,$$
$$\lambda R_b + \mu R'_b + \nu R''_b = 0,$$
$$\lambda R_c + \mu R'_c + \nu R''_c = 0,$$

et par conséquent l'équation de condition

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} R_a & R'_a & R''_a \\ R_b & R'_b & R''_b \\ R_c & R'_c & R''_c \end{vmatrix} = 0$$

exprimera que les trois points A , B , C sont sur une cyclique de foyers F , F′, F″. A cause de la symétrie de cette équation, il est clair qu'elle exprime aussi que F , F′, F″ sont sur une cyclique de foyers A , B , C , ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

Mais on peut compléter cette démonstration d'une manière remarquable, et donner une proposition plus étendue que la précédente :

Étant donnés quatre points A , B , C , D , *intersections d'une cyclique quelconque de foyers* F , F′, F″, F‴ *et d'un cercle, il y aura une seconde cyclique ayant pour foyers les points* A , B , C , D, *et passant par* F , F′, F″, F‴. On suppose, bien entendu, que ces quatre points sont les foyers situés sur un même cercle de la première cyclique.

Pour démontrer cette nouvelle proposition, il nous suffira évidemment, en nous rappelant la précédente, de prouver que la cyclique de foyèrs A , B , C passe par F‴, et admet pour quatrième foyer le point D. Or, les trois points A , B , C étant sur la cyclique de foyers F , F′, F″, on aura

$$\begin{vmatrix} R_a & R_b & R_c \\ R'_a & R'_b & R'_c \\ R''_a & R''_b & R''_c \end{vmatrix} = 0,$$

et cette équation exprime que la cyclique de foyers A , B , C , passant par F , F', contient aussi le foyer F".

D'ailleurs, le quatrième foyer D de cette cyclique satisfait également à l'équation

$$\begin{vmatrix} R_a & R_b & R_d \\ R'_a & R'_b & R'_d \\ R''_a & R''_b & R''_d \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime qu'il est sur la cyclique de foyers F , F', F", et passant par les points A et B. Cette cyclique étant la proposée, la proposition est démontrée; le quatrième foyer D sera à l'intersection de cette courbe et du cercle contenant les trois points A , B , C [1].

Un cas particulier de la proposition précédente, relatif aux ovales de Descartes, a été énoncé par M. Sylvester, j'ignore dans quel Recueil.

20.

Des cycliques situées sur des cylindres.

Nous avons vu que, pour les courbes d'intersection d'un cylindre et de la sphère, les éléments d'un des modes de génération deviennent indéterminés. En effet, les plans tangents au cylindre coupent la sphère suivant des petits cercles dont le pôle est sur le grand cercle perpendiculaire aux arêtes du cylindre. La conique sphérique correspondante se réduit donc

---

[1] L'équation

$$aR + bR' + cR'' = 0,$$

prise en elle-même, conviendrait à une surface remarquable, comprise comme cas particulier dans d'autres que nous étudierons plus tard. Cette surface a, comme les cycliques, un quatrième foyer, et elle donne lieu à la proposition suivante, analogue au théorème indiqué dans le texte :

Étant donnée une surface définie par l'équation

$$aR + bR' + cR'' = 0,$$

un cercle quelconque la coupe en quatre points qui peuvent être pris pour les foyers d'une surface de même définition, passant par les quatre foyers de la première.

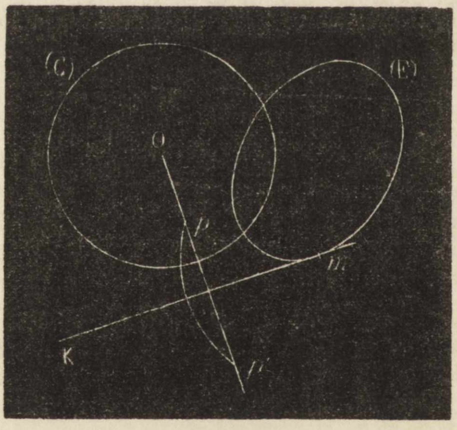
au même cercle, et il faut déterminer d'une manière directe les rayons des petits cercles enveloppant la cyclique.

A cet effet, on peut modifier légèrement la définition que nous avons donnée de la cyclique, et définir les cercles par les pôles de leurs plans. Considérons, par exemple, les plans tangents au cône (D); les pôles de ces plans tangents décriront une conique, et cette conique (H) pourra servir à déterminer la série des cercles doublement tangents. La cyclique sera la ligne de contact de la développable circonscrite à la sphère et à la conique (H). Elle sera aussi l'enveloppe des petits cercles situés dans les plans polaires des points de (H).

Dans le cas d'une courbe située sur un cylindre, cette nouvelle génération, toujours équivalente au fond à celles que nous avons données, ne devient plus illusoire. Si par le centre de la sphère on mène une section droite du cylindre, le plan de cette section droite contiendra la conique (H), polaire réciproque du cylindre et définissant la série des cercles doublement tangents à la cyclique, contenus dans les plans tangents du cylindre.

Il y a aussi une des focales situées dans le plan de la section droite du cylindre, et pour laquelle notre construction devient illusoire. On opérera de la manière suivante :

Soient (E) la section droite du cylindre, (C) le grand cercle,



section de la sphère par le plan de la section droite. Soit mK la trace d'un plan tangent au cylindre. Pour obtenir les sphères de rayon nul passant par l'intersection de ce plan et de la sphère, il faudra évidemment abaisser du centre O une perpendiculaire Opp' sur mK, et prendre l'intersection de cette perpendiculaire avec le cercle orthogonal au cercle (C) et décrit du point m comme centre. Le lieu des points p, p' sera donc une cyclique plane, définie par un mode de génération semblable à celui que nous avons adopté, et admettant la base du cylindre (E) pour conique déférente et le grand cercle (C) pour cercle directeur.

Les coniques sphériques font partie de la classe que nous étudions, et l'on voit qu'elles auront, en réalité, trois focales planes situées dans les trois plans principaux. Ces focales couperont la sphère aux foyers de la conique sphérique.

Une seule d'entre elles, d'ailleurs, sera réelle. On sait qu'une conique sphérique se projette sur les trois plans principaux : 1° suivant une ellipse intérieure à la sphère, 2° suivant une hyperbole, 3° suivant une ellipse coupant la sphère en quatre points. Cette dernière courbe seule donnera lieu à une focale réelle, qui coupera la sphère aux quatre foyers réels de la conique sphérique.

Avant de passer à l'étude de certaines propriétés des coniques sphériques, nous ferons remarquer quelques équations simples des courbes générales situées sur un cylindre, qu'on pourrait appeler *sphéro-cylindriques*.

Si le cylindre sur lequel se trouve la courbe est hyperbolique, il satisfait à l'équation

$$PQ = K,$$

d'où résulte, pour la courbe, l'équation

$$tt' = K_1. \tag{24}$$

Si les plans asymptotes ne rencontrent pas la sphère, on peut écrire

$$rr' = K_1. \tag{25}$$

Si le cylindre est elliptique, on aura, et d'une infinité de manières,

$$t^4 + t'^4 = C.$$

21.

Des coniques sphériques.

Dans le cas des coniques sphériques, les propriétés focales que nous avons indiquées prennent une forme que nous allons développer, par suite de l'importance toute particulière de ces courbes.

A cet effet, reprenons la relation

$$at + a't' + a''t'' = 0,$$

qui lie les tangentes menées d'un point de toute cyclique à trois sphères doublement tangentes d'une même série.

Chacune de ces sphères peut être supposée, pour plus de simplicité, orthogonale à la sphère primitive, et alors, si l'on mène d'un point M un arc de cercle T tangent au petit cercle suivant lequel elle coupe la sphère primitive, on aura

$$t = 2 \sin \frac{T}{2} \cdot$$

On obtient donc la relation

$$(26) \qquad a \sin \frac{T}{2} + a' \sin \frac{T'}{2} + a'' \sin \frac{T''}{2} = 0,$$

qui relie les longueurs des trois arcs tangents menés de tout point M de la cyclique à trois petits cercles doublement tangents d'une même série.

Soit maintenant une conique sphérique, et prenons quatre petits cercles doublement tangents à cette conique et deux à deux symétriques par rapport au centre; on aura, en désignant par T, T', T'', T''', les longueurs des quatre arcs tangents,

$$\sin \frac{T''}{2} = a \sin \frac{T}{2} + b \sin \frac{T'}{2},$$

$$\sin \frac{T'''}{2} = a' \sin \frac{T}{2} + b' \sin \frac{T'}{2} \cdot$$

D'ailleurs, si T et T' correspondent à des cercles symétriques, on aura

$$T + T' = \pi ;$$

de même

$$T' + T'' = \pi .$$

Les relations précédentes prennent donc la forme

$$\sin \frac{T'}{2} = a \sin \frac{T}{2} + b \cos \frac{T}{2},$$

$$\cos \frac{T'}{2} = a' \sin \frac{T}{2} + b' \cos \frac{T}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\lambda \sin \frac{T'}{2} + \mu \cos \frac{T'}{2} = (a\lambda + a'\mu) \sin \frac{T}{2} + (b\lambda + b'\mu) \cos \frac{T}{2}.$$

On peut évidemment disposer du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ de manière que cette relation prenne la forme

$$\sin \frac{T' + \alpha}{2} = \sin \frac{T + \beta}{2},$$

d'où

(27) $$T \pm T' = K.$$

Ainsi, *une conique sphérique peut être considérée d'une infinité de manières comme le lieu des points tels que la somme ou la différence des arcs de grand cercle menés de ces points tangentiellement à deux petits cercles fixes soit constante.*

Les coniques sphériques sont les *seules* courbes qui jouissent de cette propriété; car elle suppose qu'on peut mener à la cyclique quatre cercles doublement tangents, symétriques deux à deux par rapport au centre de la sphère. La cyclique sera donc sur un cylindre concentrique à la sphère; ce sera une conique sphérique.

Nous avons vu que toute conique sphérique se trouve sur un cylindre hyperbolique. Nous serons ainsi conduit à déduire, de l'équation

$$PQ = \text{const.}$$

de ce cylindre, l'équation

$$(28) \qquad \sin p \sin p' = K$$

entre les arcs de grand cercle abaissés d'un point de la conique sur deux arcs de grand cercle fixes. Ces deux arcs de grand cercle sont les *arcs cycliques* de la conique sphérique. En adoptant la méthode de l'article 19, on pourra d'ailleurs indiquer un très grand nombre de formes d'équations remarquables des coniques sphériques.

22.

Des cycliques planes.

Les propriétés des cycliques planes sont comprises comme cas particulier dans celles des cycliques sphériques. On peut indiquer deux moyens principaux pour déduire leurs propriétés de celles que nous venons de trouver.

D'abord, on peut supposer que le rayon de la sphère contenant la cyclique croisse indéfiniment; le mode de génération que nous avons adopté, les propriétés métriques et focales subsisteront sans modification.

Mais on peut aussi transformer la courbe par rayons vecteurs réciproques, et en faire la projection stéréographique en mettant le pôle en un point quelconque de la sphère qui la contient. Nous allons obtenir ainsi toutes les propriétés des cycliques planes.

Rappelons qu'une cyclique sphérique est à l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. En transformant cette définition par la méthode des polaires réciproques, on voit qu'une cyclique est aussi la courbe de contact avec la sphère de la développable circonscrite à la sphère et à une autre surface du second degré. Cette développable a quatre coniques doubles, lieux des pôles des cercles doublement

tangents à la cyclique. Appelons ces coniques (H), (H_1), (H_2), (H_3). Elles sont inscrites dans une développable, que nous appellerons Δ, et qui touche la sphère, suivant la cyclique.

Si l'on fait la projection stéréographique en se plaçant en un point α de la sphère, la cyclique se projettera suivant une cyclique plane, et, d'après un théorème bien connu relatif aux projections stéréographiques, les quatre séries de cercles doublement tangents se projetteront suivant des cercles dont les les centres seront sur les coniques (H'), (H'_1), (H'_2), (H'_3), perspectives des coniques (H), ..., (H_3) de l'espace. Par le point α passent deux génératrices de la sphère, et par chacune de ces génératrices on peut mener deux plans tangents de la développable Δ contenant les quatre coniques. Ces deux couples de plans tangents se projetteront évidemment suivant quatre tangentes communes aux coniques (H'), (H'_1), (H'_2), (H'_3), passant par les deux points sur le cercle de l'infini. Ces quatre coniques seront donc homofocales. On retrouve, on le voit, la génération signalée d'abord par MM. Moutard et Laguerre, et que nous avons employée pour les cycliques sphériques.

Quant aux cercles directeurs dans le plan, ils seront les perspectives des cercles directeurs de la sphère, et par conséquent leurs centres seront les perspectives des sommets des quatre cônes (D_i) contenant la cyclique.

On voit que si le point de vue est pris sur la cyclique, la projection stéréographique sera du 3e degré et les sommets des quatre cônes seront projetés sur la courbe plane elle-même.

Quant aux coniques déférentes (H'_i), elles deviennent dans ce cas, et dans ce cas seulement, des paraboles, puisqu'elles sont alors tangentes à la droite de l'infini.

Revenons aux cycliques planes du 4e ordre. Si l'on considère toutes les surfaces du second degré passant par la cyclique sphérique, les perspectives de leurs contours apparents sont

des coniques quadruplement tangentes à la cyclique, et pour lesquelles subsiste le théorème donné, article 15, pour les cycliques sphériques.

23.

Des cartésiennes.

Nous avons vu que ces courbes très intéressantes, qui sont à l'intersection d'une surface de révolution et de la sphère, peuvent toujours être placées sur un cône de révolution. D'ailleurs, toutes les surfaces du second degré qui les contiennent seront aussi de révolution. L'une d'elles seulement est un cylindre parabolique, qui peut être considéré comme un cas limite des surfaces de révolution.

Examinons donc les cartésiennes, en les considérant comme intersections de la sphère et d'un cylindre parabolique. La section droite du cylindre, passant par le centre, contiendra une des focales (art. 20), et cette focale, ayant pour conique déférente une parabole, sera du 3e degré. Ainsi :

Les cartésiennes se distinguent des autres cycliques par la propriété d'admettre pour focale une cubique circulaire.

Inversement, une cubique circulaire admet pour focales des cartésiennes.

Les propriétés métriques des cartésiennes sont plus simples que les propriétés générales que nous avons signalées.

Comme elles sont sur un cylindre parabolique, leur équation peut être ramenée, et d'une infinité de manières, à la forme

$$(29) \qquad t^2 = at', \quad \text{ou} \quad \sin^2\frac{T}{2} = K\sin\frac{T'}{2}.$$

En second lieu, elles sont sur une infinité de surfaces de révolution, et ces surfaces de révolution ont leurs foyers sur

la cubique circulaire, à l'intersection de cette cubique et d'une parallèle à l'asymptote réelle. L'équation de la courbe, rapportée à ces deux foyers, prendra la forme

$$r \pm r' = K.$$

Au moyen de la relation précédente, on peut toujours réduire l'équation focale de la courbe, de telle manière qu'elle ne contienne que deux foyers quelconques, pris sur la cubique, et soit de la forme

$$\alpha R + \beta R' = 1. \tag{30}$$

Ainsi, *étant donnée une cartésienne, si l'on prend deux foyers quelconques sur la focale cubique, il y a une relation linéaire* (30) *entre les distances d'un point de la cartésienne à ces deux foyers.*

On a $\alpha = \beta$ quand les deux foyers sont sur une parallèle à l'asymptote réelle de la focale cubique.

On pourrait ajouter beaucoup aux propriétés des *cartésiennes*. Nous pourrons y revenir.

24.

De la transformation par rayons vecteurs réciproques dans les cycliques, et des transformations de ces courbes les unes dans les autres.

Supposons d'abord qu'on prenne le pôle en un des foyers de la cyclique. Désignons par r la distance à ce foyer, et par r', r'' les distances à deux autres foyers situés sur le même cercle directeur que le premier. L'équation de la cyclique,

$$ar + br' + cr'' = 0,$$

se transformera en une équation de la forme

$$aR + bR' = C.$$

En d'autres termes, la cyclique transformée qui est une courbe plane sera formée des *ovales de Descartes*. Ainsi,

Toute cyclique se transforme dans les ovales de Descartes, quand on place le pôle de transformation en un des foyers situés sur la sphère contenant la cyclique.

Plaçons maintenant le pôle de transformation, non plus en un des foyers situés sur la sphère, mais en un point quelconque de l'une des focales. Alors cette focale deviendra une *cubique circulaire*, et par conséquent la courbe elle-même se transformera en une cartésienne. C'est ce qu'on peut voir aussi de la manière suivante :

Le pôle α étant un foyer, le cône ayant pour sommet ce point et pour base le cercle de l'infini sera doublement tangent à la cyclique, et par conséquent la transformée par rayons vecteurs réciproques, d'après les principes de la *Première Partie*, sera doublement tangente au cercle de l'infini. Ce sera donc une cartésienne.

Si l'on prend le pôle de transformation sur l'une des quatre sphères contenant les focales, une de ces focales deviendra plane, et par conséquent la courbe sera sur un cylindre. Si le point est à l'intersection de deux des sphères contenant les focales, la courbe sera sur deux cylindres, et aura deux plans de symétrie. Enfin, si le pôle est en un des points d'intersection de trois des sphères contenant les focales, la transformée sera une conique sphérique.

Ainsi, *toute cyclique peut être considérée comme la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conique sphérique.*

Il résulte de là une première construction simple de la tangente.

La tangente à une conique sphérique est la bissectrice de l'angle des arcs de grand cercle joignant le point de contact aux foyers. Ces arcs de grand cercle passent par deux foyers. Donc

Si par un point de la cyclique on fait passer deux cercles passant chacun par deux des quatre foyers situés sur un cercle

directeur, la tangente est la bissectrice de l'angle de ces deux cercles.

Il importe de remarquer toutefois que, pour les cycliques se composant d'une seule branche, deux seulement des sphères contenant les focales sont réelles. La transformation en une conique sphérique ne peut donc être faite qu'avec un pôle imaginaire. Ainsi, une cyclique ne peut réellement être transformée en une conique sphérique que si elle a deux branches, ce qui entraîne quatre foyers réels sur un même cercle directeur, trois sphères réelles contenant les focales, et se coupant en deux points qui doivent être choisis comme pôles de la transformation. Par exemple, les ovales de Descartes à trois foyers réels sont seuls les transformées d'une conique sphérique réelle.

La propriété que nous venons de signaler n'en est pas moins importante, puisqu'elle permet d'étendre aux cycliques bien des propriétés des coniques sphériques. Citons seulement celle-ci :

Les cycliques homofocales se coupent à angle droit.

On a donc un système orthogonal formé de cycliques homofocales. Nous reviendrons sur ce système orthogonal, ainsi que sur d'autres systèmes formés de cycliques. Mais nous devons indiquer une dernière transformation par rayons vecteurs réciproques, s'appliquant à toutes les cycliques.

Il suffira de prendre le pôle aux points d'intersection de la sphère contenant la cyclique, et de deux autres sphères réelles contenant deux focales. La courbe se transformera en une cyclique plane ayant deux axes de symétrie. Ainsi, *toutes les cycliques peuvent dériver par une transformation réelle des cycliques planes à deux axes de symétrie.*

Si l'on prenait le pôle à l'intersection de la sphère contenant la courbe et d'une autre sphère contenant une focale, on aurait une cyclique ayant un seul axe de symétrie. C'est à cette classe qu'appartiennent généralement les sections du tore, ou *spiriques*.

25.

Du système orthogonal formé par les cycliques homofocales.

Étant donnée une sphère et une développable Δ de 4e classe circonscrite à cette sphère, on pourra inscrire dans la développable une suite de surfaces qui couperont la sphère suivant des cycliques. Les foyers de ces cycliques, étant à l'intersection des coniques doubles de la développable Δ et de la sphère, demeureront les mêmes. Elles seront donc homofocales. Nous allons démontrer que ces cycliques se coupent à angle droit.

On sait en effet qu'étant donné un système de surfaces du second degré inscrites dans une même développable, on pourra faire passer trois de ces surfaces par chaque point de l'espace, et que les tangentes aux trois courbes d'intersection seront conjuguées dans chacune de ces surfaces. Il suit de là que par chaque point de la sphère on pourra faire passer deux surfaces inscrites dans la développable Δ ; ces surfaces couperont la sphère suivant deux cycliques, et les tangentes à ces cycliques seront conjuguées dans la sphère, c'est-à-dire orthogonales. Ainsi,

Par chaque point de la sphère on peut faire passer deux cycliques de foyers donnés, et ces deux cycliques se coupent à angle droit.

Le système des cycliques homofocales comprend quatre courbes infiniment aplaties.

Pour obtenir ce système de cycliques, il suffira évidemment de prendre tous les cônes ayant même sommet et tangents à quatre plans tangents de la sphère. Il y a deux systèmes de cycliques homofocales : ceux dont les quatre foyers réels sont sur un même cercle, et ceux dont les

foyers réels sont disposés par couples sur deux cercles orthogonaux.

On voit qu'il n'est pas plus général de prendre des surfaces du second degré quelconques au lieu de cônes. Ce fait met en évidence une proposition très générale, qu'on peut énoncer ainsi :

Si l'on a une série de surfaces inscrites dans une même développable circonscrite à une surface (A), ***elles couperont la surface*** (A) ***suivant des courbes par lesquelles on pourra faire passer d'autres surfaces du second degré inscrites dans une nouvelle développable circonscrite à la surface*** (A).

La démonstration analytique de cette proposition ne présente aucune difficulté. Considérons des surfaces inscrites dans une développable. Leur équation sera de la forme

$$(31) \qquad \frac{P^2}{\lambda - a} + \frac{P'^2}{\lambda - a'} + \frac{P''^2}{\lambda - a''} + \frac{P'''^2}{\lambda - a'''} = 0.$$

Soit

$$(32) \qquad P^2 + P'^2 + P''^2 + P'''^2 = 0$$

l'équation de la surface (A) inscrite dans la même développable, et que l'on obtient en faisant

$$\lambda = \infty.$$

Si l'on retranche de l'équation (31) l'équation (32) multipliée par $\lambda - h$, on trouve

$$(33) \quad \frac{P'(a-h)}{\lambda - a} + \frac{P'^2(a'-h)}{\lambda - a'} + \frac{P''^2(a''-h)}{\lambda - a''} + \frac{P'''^2(a'''-h)}{\lambda - a'''} = 0,$$

équation qui représente des surfaces passant par les courbes situées sur la surface (A), et inscrites, elles aussi, dans une développable.

Nous ne développerons pas la théorie analytique des cycliques; elle est comprise dans celle que nous donnerons pour les surfaces du 4e ordre, qui sont, dans l'espace, les analogues des cycliques planes.

26.

Des cycliques analogues à l'ellipse de Cassini.

Le système orthogonal formé de cycliques homofocales n'est pas le seul qu'on puisse former avec ces courbes. Il existe un autre système orthogonal, formé de cycliques analogues à l'ellipse de Cassini. Certaines de ces courbes ont été étudiées par Van Rees dans un beau Mémoire sur les focales. M. Laguerre les a considérées sous le nom de *cassiniennes*, et en a donné plusieurs belles propriétés. Dans la *Troisième Partie* de ce travail, nous rattacherons l'étude de ces courbes à celle d'autres courbes plus générales, et nous déduirons leurs propriétés de quelques théorèmes généraux relatifs à l'emploi des imaginaires en géométrie.

TROISIÈME PARTIE.

Etude de certaines propriétés des imaginaires en géométrie, et d'une classe générale de courbes algébriques, comprenant comme cas particulier la courbe de Cassini.

27.

Des points associés dans le plan.

Soient, dans un plan, des points rapportés à des coordonnées rectangulaires. La distance d'un point (x, y) à un point fixe du plan s'exprime par la formule

$$\delta^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

qu'on peut écrire

$$\delta^2 = (x+yi-a-bi)(x-yi-a+bi).$$

On voit donc que le carré de la distance se décompose en deux facteurs, et l'on est ainsi conduit à un système de coordonnées *symétriques* fréquemment employé.

Substituons aux quantités x, y les coordonnées u, v, définies par les formules

(35) $$u = x + yi, \quad v = x - yi.$$

Si l'on pose, de même,

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = a - bi,$$

on obtient

(36) $$\delta^2 = (u-\alpha)(v-\beta).$$

Cela posé, soient deux points P, Q; par ces deux points menons des droites aux points à l'infini sur le cercle; ces droites se rencontrent en deux nouveaux points P′, Q′. Nous dirons que ces nouveaux points sont *associés* aux premiers.

Réciproquement, P, Q sont associés à P′, Q′. Si les points P, Q sont réels, les points P′, Q′ sont imaginaires conjugués, et inversement. On peut dire que deux couples de points associés sont deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère, dont les deux autres sommets opposés sont les deux points I et J à l'infini sur le cercle.

Soient

$u = \alpha\,,\ v = \beta$ les coordonnées du point P;

$u = \alpha'\,,\ v = \beta'$ celles du point Q.

Les coordonnées des points associés seront, par exemple,

pour le point P′, $u = \alpha\,,\ v = \beta'$;

pour le point Q′, $u = \alpha'\,,\ v = \beta$.

Considérons un point quelconque M du plan. On aura les formules suivantes

$$\overline{MP}^2 = (u - \alpha)(v - \beta)\,, \qquad \overline{MQ}^2 = (u - \alpha')(v - \beta')\,,$$
$$\overline{MP'}^2 = (u - \alpha)(v - \beta')\,, \qquad \overline{MQ'}^2 = (u - \alpha')(v - \beta)\,.$$

On déduit d'abord de ces formules

$$\text{(37)} \qquad MP\,.\,MQ = MP'\,.\,MQ'.$$

Donc *le produit des distances d'un point quelconque du plan à deux points fixes est égal au produit des distances du même point aux deux points associés.*

On peut déduire de nouvelles relations de la signification géométrique des facteurs $u - \alpha\,,\ v - \beta$. Soit ω l'angle que fait MP avec l'axe des x; on a

$$x - a = MP\,.\cos\omega\,, \qquad y - b = MP\,.\sin\omega\,,$$

et par suite

$$\text{(38)} \qquad u - \alpha = MP\,.\,e^{\omega i}, \qquad v - \beta = MP\,.\,e^{-\omega i}\,,$$

d'où

$$\text{(39)} \qquad \frac{u - \alpha}{v - \beta} = e^{2\omega i}\,.$$

L'angle PMQ, sous lequel on voit le segment PQ, est évi-

demment égal à la différence des angles ω, ω', que font les droites MP, MQ avec l'axe des x. On a donc

$$e^{2i(\widehat{PMQ})} = e^{2i(\omega-\omega')} = \frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-\alpha'}{v-\beta'} = \frac{(u-\alpha)(v-\beta')}{(u-\alpha')(v-\beta)} = \left(\frac{MP'}{MQ'}\right)^2,$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$e^{i(\widehat{PMQ})} = \frac{MP'}{MQ'}. \tag{40}$$

De même,

$$e^{i(\widehat{P'MQ'})} = \frac{MP}{MQ}.$$

Donc *le rapport des distances d'un point* M *du plan à deux points est égal à* e^{iV}, V *désignant l'angle sous lequel on voit du même point le segment formé par les points associés.*

Cette proposition est importante [1]; elle permet, quand deux points sont imaginaires conjugués, de remplacer les éléments imaginaires relatifs à ces deux points par des fonctions d'éléments réels, correspondants aux points associés.

Nous allons donner deux applications. Prenons d'abord deux points fixes A, B sur un cercle. On sait que l'angle sous lequel on voit d'un point du cercle le segment AB est constant. Donc le rapport des distances du même point aux deux points A', B', associés à A et à B, est aussi constant. Si les points A et B

---

[1] Cette proposition se déduit, comme on voit, très simplement de l'équation

$$e^{2iV} = \frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-\alpha'}{v-\beta'},$$

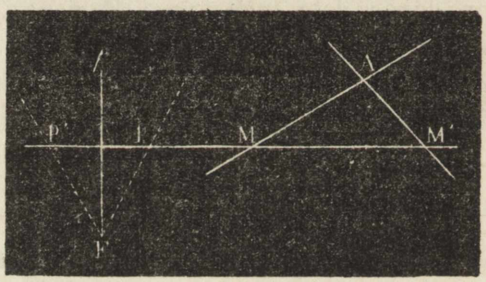
et cette dernière équation exprime que l'angle de deux droites MA, MB multiplié par $2i$, est le logarithme du rapport anharmonique des quatre droites MA, MB, MI, MJ. Ce fait remarquable, contenu implicitement dans une formule du *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, a été pour la première fois énoncé d'une manière explicite par M. Laguerre (*Nouvelles Annales de Mathématiques* 1853, p. 57), et appliqué par ce géomètre à une question importante, la transformation des relations contenant des angles dans l'homographie. On pourra consulter à ce sujet le *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, de M. Chasles, p. 313.

deviennent imaginaires, A′, B′ deviennent réels, et on retrouve une propriété connue du cercle. Mais nous allons traiter un exemple moins simple.

On sait la difficulté qu'ont rencontrée les auteurs de Traités de sections coniques dans l'étude des propriétés focales des courbes du second degré. Il est difficile, quand on prend pour point de départ les beaux théorèmes généraux relatifs aux sections coniques, de rattacher à ces propositions générales, d'une manière directe, la démonstration des propriétés métriques focales. Les remarques précédentes permettent, il nous semble, de lever simplement cette difficulté.

Nous nous appuierons seulement sur un des deux théorèmes généraux que M. Chasles a pris pour base de sa *Théorie des sections coniques*. Le rapport anharmonique des quatre points où une tangente mobile rencontre quatre tangentes fixes est constant.

Prenons deux tangentes quelconques se coupant en A, et deux autres tangentes imaginaires passant par les deux points



à l'infini sur le cercle, et se coupant en un point réel F, qui, d'après la définition générale, sera un foyer. Soit une tangente mobile MM′PP′. Elle coupe les deux tangentes imaginaires en deux points imaginaires P, P′ représentés pour plus de clarté sur la figure, et ayant *pour associés le foyer* F *et son symétrique* f *par rapport à la tangente*. Écrivons que le rapport anharmonique des quatre points M, M′, P, P′ est constant; nous aurons

$$\frac{MP}{MP'} : \frac{M'P}{M'P'} = K.$$

Or, d'après la formule (40), les deux rapports qui figurent dans le premier membre peuvent s'exprimer en fonction des angles relatifs aux points associés. On a

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MP'}} = e^{i(\widehat{\mathrm{FM}f})}, \quad \frac{\mathrm{PM'}}{\mathrm{P'M'}} = e^{i(\widehat{\mathrm{FM'}f})},$$

et, par suite,

$$e^{i(\widehat{\mathrm{FM}f} - \widehat{\mathrm{FM'}f})} = \mathrm{K}.$$

La différence des angles qui figurent dans le premier membre de cette formule est évidemment égale au double de l'angle sous lequel on voit du foyer le segment MM'.

Donc *la portion de tangente comprise entre deux tangentes fixes est vue de chaque foyer sous un angle constant.*

Supposons maintenant que les deux tangentes fixes soient menées du second foyer. Les points associés à M, M' seront le foyer F' et son symétrique f' par rapport à la tangente. L'angle MFM' s'exprimera, par la formule (40), en fonction du rapport des distances du foyer F aux deux points F', f'. Donc le rapport $\frac{\mathrm{F}f'}{\mathrm{FF'}}$, et par suite $\mathrm{F}f'$ restera constant. Ainsi, *le symétrique d'un foyer par rapport à la tangente décrit un cercle ayant pour centre l'autre foyer.*

Ces deux propositions peuvent évidemment constituer une base pour la théorie des foyers. On en déduit immédiatement les propriétés métriques focales.

Les points associés donnent lieu encore à des propriétés nombreuses. Par exemple, *les droites qui joignent un point* M *du plan à deux points* P, Q *ont mêmes bissectrices que les droites joignant le point* M *aux deux points associés* P', Q'. La différence

$$\mathrm{MP}^2 + \mathrm{MQ}^2 - \mathrm{MP'}^2 - \mathrm{MQ'}^2$$

est constante, quel que soit le point M, et par conséquent égale à PQ^2. On a

$$\mathrm{PQ}^2 = -\mathrm{P'Q'}^2, \quad (\mathrm{MP} + \mathrm{MQ})^2 - (\mathrm{MP'} + \mathrm{MQ'})^2 = \mathrm{PQ}^2.$$

Mais il nous paraît inutile de multiplier les énoncés.

28.

D'une classe générale de courbes.

On peut aussi déduire des principes précédents des propositions beaucoup plus générales, s'appliquant à une classe nombreuse de courbes de tous les degrés. Voici la définition de ces courbes, auxquelles nous allons étendre une des propriétés les plus importantes du cercle.

Soit une courbe telle que *le produit des distances de l'un quelconque de ses points à une série de pôles fixes soit dans un rapport constant avec le produit des distances du même point à une autre série de pôles fixes.*

Son équation sera

$$rr'r'' \ldots = k \, . \, RR'R'' \ldots ;$$

ou

$$\frac{(u-\alpha)(v-\beta)(u-\alpha')(v-\beta')\ldots}{(u-a)(v-b)(u-a')(v-b')\ldots} = k^2$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{(u-\alpha)(u-\alpha')\ldots}{k(u-a)(u-a')\ldots} = \frac{k(v-b)(v-b')\ldots}{(v-\beta)(v-\beta')\ldots}.$$

Elle est donc de la forme

$$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \frac{\psi_1(v)}{\varphi_1(v)}, \tag{41}$$

où $\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1$, désignent des polynômes imaginaires, conjugués deux à deux. Il est évident que, réciproquement, toute équation de la forme (41) représente une courbe jouissant de la propriété énoncée, et, pour avoir les deux séries de pôles contenus dans cette définition, il suffira de décomposer en facteurs les polynômes φ, ψ.

Or l'équation (41) peut s'écrire

$$\frac{\varphi(u) + \lambda\psi(u)}{\lambda'\varphi(u) + \psi(u)} = \frac{\psi_1(v) + \lambda\varphi_1(v)}{\lambda'\psi_1(v) + \varphi_1(v)}, \tag{42}$$

ou

$$[\varphi(u) + \lambda\psi(u)]\,[\varphi_1(v) + \lambda'\psi_1(v)]$$
$$= [\psi(u) + \lambda'\varphi(u)]\,[\psi_1(v) + \lambda\varphi_1(v)]\,.$$

La forme nouvelle de l'équation est identique à la première (41); mais les racines des polynômes ont changé. La définition de la courbe reste donc la même, *mais avec d'autres pôles.*

Donc, *si une courbe est telle que les produits des distances de l'un de ses points à deux séries de pôles fixes soient dans un rapport constant, cette propriété subsistera quand on remplacera les pôles fixes par une infinité de nouveaux systèmes de points convenablement choisis.*

Les deux nouvelles séries de pôles ne seront réelles, comme le montre l'équation précédente, que si λ et λ' sont imaginaires conjugués. Alors les pôles de la première série seront donnés par les équations

$$(43)\qquad \Phi(u) = \varphi(u) + \lambda\psi(u) = 0\,,\qquad \Phi_1(v) = \varphi_1(v) + \lambda'\psi_1(v) = 0\,,$$

et ceux de la seconde par

$$(44)\qquad \Psi(u) = \psi(u) + \lambda'\varphi(u) = 0\,,\qquad \Psi_1(v) = \psi_1(v) + \lambda\varphi_1(v) = 0\,.$$

Il y a plusieurs remarques à faire sur ces nouveaux pôles. D'abord les équations (43), (44) sont du même degré. Donc, alors même que les pôles primitifs ne seraient pas en même nombre dans les deux séries, les nouveaux pôles seront en nombre égal dans chaque série.

En second lieu, si l'un des pôles était multiple, le polynôme $\varphi(u)$ avait un facteur multiple; mais, dans les nouveaux systèmes, il n'en est plus ainsi, et les pôles multiples sont remplacés généralement par des pôles simples, en nombre égal au degré de multiplicité.

Enfin, on peut disposer de λ et de λ' de manière que *l'un des pôles soit en un point donné quelconque,* et les autres seront alors déterminés. Si nous exprimons, en effet, que les équations (43)

sont vérifiées par des valeurs données de u et de v, ces équations feront connaître λ et λ'.

Quand on aura choisi arbitrairement le premier pôle A_1, voici comment on trouvera tous les autres. Par A_1 on mènera des droites aux deux points I, J ; ces droites coupent la courbe en deux groupes de n points, et on reliera d'une manière quelconque les points du premier groupe à ceux du second par n droites. Les n pôles de l'une des séries seront les symétriques de A_1 par rapport à ces n droites ; et, en opérant comme précédemment sur l'un de ces n pôles, on trouvera de même A_1 et les $n-1$ pôles qui avec A_1 forment la série associée à la précédente.

La courbe la plus simple de la classe actuelle est le cercle, pour les points duquel le rapport des distances à deux pôles fixes est constant. La proposition énoncée plus haut est donc la généralisation d'une des propriétés fondamentales du cercle.

Mais il nous paraît digne d'intérêt qu'on puisse étendre à toutes nos courbes les propriétés relatives à l'angle inscrit dans le cercle, et de la manière suivante :

Donnons, dans la formule (42), à λ et à λ' des valeurs imaginaires, e^{hi}, e^{ki}, dont le module soit l'unité. Cette équation prendra la forme

$$\frac{\varphi(u)+e^{hi}\psi(u)}{\varphi_1(v)+e^{-hi}\psi_1(v)}=e^{(h+k)i}\frac{\varphi(u)+e^{-ki}\psi(u)}{\varphi_1(v)+e^{ki}\psi_1(v)}. \tag{45}$$

Les deux termes des deux fractions sont imaginaires conjugués. Donc, si nous les décomposons en facteurs, l'équation précédente deviendra

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta}\cdot\frac{u-\alpha'}{v-\beta'}\cdot\frac{u-\alpha''}{v-\beta''}\cdots=\frac{u-a}{v-b}\cdot\frac{u-a'}{v-b'}\cdot\frac{u-a''}{v-b''}\cdots,$$

où (α, β), (α', β'), ..., (a, b), ... sont imaginaires conjugués.

Soient A_i le point réel défini par les coordonnées α_i, β_i ; B_i le point réel défini par a_i, b_i. Désignons par ω_i l'angle que fait avec l'axe des x le rayon qui va du point M (u, v) au point A_i ;

par ω'_i le même angle pour le point B_i. On a, d'après une formule déjà rappelée (39),

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta}=e^{2i\omega}, \quad \frac{u-a}{v-b}=e^{2i\omega'}, \text{ etc.}$$

L'équation (45) prend donc la forme

$$\omega+\omega_1+\omega_2+\cdots-\omega'-\omega'_1-\omega'_2-\cdots=\text{constante},$$

ou

(46) $$\omega-\omega'+\omega_1-\omega'_1+\omega_2-\omega'_2+\cdots=\text{constante}.$$

Sous cette forme, elle exprime que la somme des angles sous lesquels on voit d'un point de la courbe les segments rectilignes AB , A_1B_1 , ... , A_iB_i , ... est constante.

Donc, *quand une courbe est telle que les produits des distances de l'un quelconque de ses points à deux séries de pôles fixes soient dans un rapport constant, on peut encore la considérer, et d'une infinité de manières, comme le lieu des points tels que la somme (ou la différence) des angles sous lesquels on voit d'un point de la courbe des segments fixes soit constante.*

On obtient ainsi la généralisation complète de la propriété de l'angle inscrit dans le cercle. Il y a quelques remarques à présenter sur les segments.

D'abord leurs extrémités sont sur la courbe; cela est évident d'après l'équation, et résulte aussi du théorème. Car, lorsque le point décrivant la courbe sera en un des points A par exemple, l'angle sous lequel on verra du point le segment AB sera indéterminé, et on pourra lui donner, en particulier, la valeur qui satisfait à l'équation (46).

On se rend compte d'ailleurs du résultat qui précède au moyen d'une proposition déjà énoncée. On sait, en effet, que l'angle V, sous lequel on voit un segment d'un point M, s'exprime en fonction des distances r , r' aux points associés du segment, par la formule

$$e^{iV}=\frac{r}{r'}.$$

On voit donc qu'*analytiquement* les deux définitions données

dans les énoncés précédents sont identiques. Mais l'une n'est employée que lorsque les éléments qui figurent dans l'autre deviennent imaginaires conjugués.

Les courbes précédentes ont des foyers, que nous allons déterminer. A cet effet, reprenons leur équation, qu'on peut écrire

$$\frac{\varphi(u)+\lambda\psi(u)}{\psi(u)+\lambda'\varphi(u)}=\frac{\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)}{\varphi_1(v)+\lambda'\psi_1(v)}$$

Les pôles de la première série correspondants à cette forme de l'équation, sont déterminés par les racines de l'équation

$$\varphi(u)+\lambda\psi(u)=0\,. \tag{47}$$

Disposons de λ de telle manière que cette équation ait une racine double, ce qui exige que l'on ait

$$\varphi'(u)+\lambda\psi'(u)=0\,,$$

ou

$$\varphi(u)\psi'(u)-\psi(u)\varphi'(u)=0\,.$$

Alors, toutes les droites données par les valeurs de v, racines de l'équation

$$\psi_1(v)+\lambda\varphi_1(v)=0\,,$$

seront tangentes à la courbe; car leurs intersections avec la courbe sont définies par l'équation (47), qui a une racine double. Les points réels situés sur ces droites seront donc les foyers. Nous ferons l'application de cette remarque en étudiant quelques courbes particulières.

Pour ces systèmes de pôles particuliers, l'équation des courbes prendrait la forme

$$R'R''R'''\cdots=k\,.\,rr'r''r'''\cdots\,.$$

Il y a un pôle double dans la première série. Ceux de la seconde sont des foyers.

Enfin, il ne sera pas inutile de remarquer que les courbes étudiées dans cet article appartiennent à la classe de celles dont la définition ne change pas quand on les transforme par

rayons vecteurs réciproques. Si le pôle est dans le plan, cela est évident; car toute transformation par rayons vecteurs réciproques se ramène, comme on sait, dans le système de coordonnées symétriques, à effectuer une substitution de la forme

$$u = \frac{\alpha v_1 + \alpha'}{\beta v_1 + \beta'}, \quad v = \frac{a u_1 + a'}{b u_1 + b'} \tag{48}$$

et une telle substitution ne change en aucune façon la forme des équations de nos courbes. Mais on peut donner aussi la démonstration suivante qui s'applique au cas où le pôle de transformation est en dehors du plan, et où nos courbes planes deviennent des courbes sphériques.

Étant donnés le pôle O et deux points A, M, dont les transformés sont a, m, on aura

$$\frac{AM}{OA} = \frac{am}{Om}, \quad AM = OA . \frac{am}{Om} .$$

Cette formule nous montre que la distance d'un point variable M à un point fixe A se reproduit multipliée par une constante et divisée par la distance du point m au pôle.

Donc toute équation homogène entre les distances, et en particulier l'équation

$$RR' \ldots = k . rr' \ldots ,$$

où le nombre des facteurs est le même dans chaque membre, conservera la même forme après une transformation. Cependant, si le pôle de la transformation était placé en un des pôles de la courbe, A par exemple, le facteur R correspondant disparaîtrait, quel que fût son degré de multiplicité. Par exemple l'équation

$$RR' = k . r^2$$

représente une transformée par rayons vecteurs réciproques d'ellipse de Cassini, puisqu'on pourra faire disparaître le facteur r^2.

29.

Du système orthogonal formé avec les courbes précédentes.

Soient les deux systèmes de courbes représentés par les équations

(49) $$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = \alpha \cdot \frac{\psi_1(v)}{\varphi_1(v)},$$

et

(50) $$\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = e^{\beta i} \cdot \frac{\varphi_1(v)}{\psi_1(v)} \cdot$$

Lorsqu'on fait varier α, β, les équations précédentes représentent deux systèmes de courbes isothermes et orthogonales. Nour rappellerons d'abord en quelques mots la démonstration de ce théorème.

Les formules précédentes, si l'on prend les logarithmes des deux membres, rentrent dans le type

$$\Phi(u) + \Psi(v) = C, \quad \Phi(u) - \Psi(v) = C_1.$$

D'après cela, si l'on considère la courbe de chaque système passant par un point donné du plan, les tangentes à ces deux courbes seront données par des valeurs de $\frac{du}{dv}$ égales et de signes contraires. Or on a, en appelant V l'angle que fait la tangente avec l'axe des x,

$$\frac{du}{dv} = \frac{dx + idy}{dx - idy} = e^{2iV}.$$

En appelant V_1, V'_1 les angles pour nos deux courbes, on aura donc

$$e^{iV_1} = -e^{iV'_1}, \quad \text{ou} \quad V_1 - V'_1 = \pm\frac{\pi}{2},$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, deux systèmes de courbes représentés par les deux équations du type

(51) $$\Phi(u) + \Psi(v) = \alpha, \quad \Phi(u) - \Psi(v) = \beta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\Phi_1(u)}{\Psi_1(v)} = \alpha, \quad \Phi_1(u)\Psi_1(v) = \beta, \tag{52}$$

sont des systèmes orthogonaux : ce sont les systèmes isothermes, si souvent étudiés par les géomètres.

L'interprétation géométrique des équations (49) et (50) nous conduit alors au théorème suivant :

Si l'on considère les courbes telles que les produits des distances d'un quelconque de leurs points à deux séries de points fixes soient dans un rapport constant, elles seront toutes coupées à angle droit par des courbes qu'on pourra définir de la même manière.

Les pôles qui servent à la définition des courbes orthogonales sont obtenus de la manière suivante. Soient

$$A, A', \ldots, \quad A_1, A'_1, \ldots$$

les droites passant par les premiers pôles des premières courbes et les points I et J; soient de même

$$B, B', \ldots, \quad B_1, B'_1, \ldots$$

les droites passant par les seconds pôles des mêmes courbes et les points I et J. Les pôles des courbes orthogonales seront déterminés par les intersections des droites

$$\begin{cases} A, A', \ldots, \\ B_1, B'_1, \ldots, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_1, A'_1, \ldots, \\ B, B', \ldots. \end{cases}$$

Mais, les nouveaux pôles étant imaginaires, la définition du second système orthogonal doit être énoncée de la manière suivante :

Les courbes du second système sont telles que la somme des angles sous lesquels on voit les segments formés en associant deux à deux les pôles des deux séries du premier système orthogonal soit constante.

C'est la forme sous laquelle on donne ordinairement les propriétés du second système orthogonal.

30.

Des courbes lieux des points d'où l'on voit plusieurs segments sous des angles dont la somme est nulle.

L'équation

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f_1(v)}{\varphi_1(v)}, \tag{53}$$

où f, f_1, φ, φ_1 désignent des polynômes imaginaires conjugués, dont les premiers termes ont l'unité pour coefficient, est comprise comme cas particulier dans l'équation (45). Elle représente des courbes, de degré impair, qui se distinguent des courbes générales, en ce que la somme des angles sous lesquels on voit d'un point de la courbe plusieurs segments est égale à un multiple de π. L'équation peut en effet s'écrire

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-a}{v-b} \times \frac{u-\alpha'}{v-\beta'} : \frac{u-a'}{v-b'} \times \ldots = 1,$$

ou

$$V + V' + V'' + \ldots = k\pi.$$

La même propriété subsiste avec d'autres segments; car on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\varphi(u) + \lambda' f(u)}{\varphi(u) + \lambda f(u)} = \frac{\varphi_1(v) + \lambda' f_1(v)}{\varphi_1(v) + \lambda f_1(v)},$$

absolument semblable à la forme (53); mais les segments servant à la définition de la courbe sont changés, et demeurent réels, si λ et λ' le sont. Donc,

Quand une courbe est le lieu des points tels qu'on voit de ces points plusieurs segments sous des angles dont la somme est un multiple de π, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments, ayant tous leurs extrémités sur la courbe.

Les courbes précédentes comprennent comme cas particulier celles qui sont définies par une équation de la forme

$$\sum \frac{\lambda_i}{R_i^2} = A, \tag{54}$$

où les quantités R_i désignent des distances à des pôles fixes, situés sur une droite. Si nous prenons cette droite pour axe des x, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\sum \frac{\lambda_i}{(u - a_i)(v - a_i)} = A,$$

ou, en multipliant par $u - v$,

$$\sum \frac{\lambda_i}{u - a_i} + Au = \sum \frac{\lambda_i}{v - a_i} + kv, \tag{55}$$

ou enfin

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)}.$$

Mais nous n'insistons pas sur ce cas particulier, que nous aurons à considérer plus loin à un autre point de vue (voir art. 37).

31.

Des rapports entre la théorie générale des cycliques et celle des fonctions elliptiques.

L'étude détaillée de ces rapports nous entraînerait trop loin. Cependant nous allons indiquer rapidement comment la théorie générale des cycliques peut être rattachée aux fonctions elliptiques.

Soit l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \frac{dv}{\sqrt{f_1(v)}}, \tag{56}$$

où $f(u)$, $f_1(v)$ désignent des polynomes imaginaires conjugués du 4e degré. En général, cette équation ne peut s'intégrer en termes finis. Mais, si la différentielle $\frac{du}{\sqrt{f(u)}}$ se déduit de $\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}}$ par une substitution linéaire de la forme

$$u = \frac{a\xi + a'}{b\xi + b'}, \tag{57}$$

la différentielle $\frac{dv}{\sqrt{f_1(v)}}$ se déduira de même de $\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k\eta^2)}}$ par la substitution

$$v = \frac{\alpha\eta + \alpha'}{\beta\eta + \beta'}, \tag{58}$$

imaginaire conjuguée de la précédente, et l'équation différentielle (56) sera intégrable algébriquement. L'étude de cette intégrale nous avertit que la courbe qu'elle représente est une cyclique plane quelconque. Elle est en effet de la forme

$$Au^2v^2 + Buv^2 + B_1u^2v + Cu^2 + C_1v^2 + Duv + Eu + E_1v + F = 0.$$

D'ailleurs, l'équation différentielle (56) met en évidence les propriétés focales de la courbe.

En effet, soient

$$f(u) = A(u-a_1)(u-a_2)(u-a_3)(u-a_4),$$
$$f_1(v) = B(v-b_1)(v-b_2)(v-b_3)(v-b_4).$$

La droite

$$u = a_i$$

coupera la courbe en un point pour lequel $\frac{du}{dv}$ est nul, d'après l'équation différentielle. Cette droite est donc tangente à la courbe. Il en est de même des droites

$$v = b_i.$$

La cyclique aura donc les 16 foyers définis par les équations

$$f(u) = 0, \qquad f_1(v) = 0.$$

Nous allons démontrer que ces foyers peuvent être placés 4 à 4 sur des cercles.

Les polynômes $f(u)$, $f_1(v)$ provenant d'un même polynôme par une substitution linéaire, leurs racines auront les mêmes rapports anharmoniques. Supposons par exemple que $O(a_1, a_2, a_3, a_4) = O(b_1, b_2, b_3, b_4)$. On aura

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} : \frac{a_1-a_4}{a_2-a_4} = \frac{b_1-b_3}{b_2-b_3} : \frac{b_1-b_4}{b_2-b_4}.$$

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les quatre foyers déterminés par les coordonnées (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4). On a, d'après des formules que nous avons fréquemment employées,

$$\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3} = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} e^{i.\widehat{A_1A_3A_2}}, \quad \frac{a_1-a_4}{a_2-a_4} = \frac{A_1A_4}{A_2A_4} e^{i.\widehat{A_1A_4A_2}},$$

et de même pour les rapports figurant dans le second membre de l'équation, ce qui nous conduit, en substituant, à la formule

$$2(\widehat{A_1A_3A_2} - \widehat{A_1A_4A_2}) = 2k\pi .$$

Cette égalité exprime que le quadrilatère formé par les quatre points est inscriptible, et, par conséquent, que les quatre foyers sont sur un cercle.

Comme chaque valeur du rapport anharmonique répond à quatre dispositions différentes des éléments, on trouvera quatre cercles sur lesquels les 16 foyers seront rangés 4 à 4.

Enfin l'équation (56) conduit à une construction simple de la tangente aux cycliques, analogue à celle que l'on connaît pour les courbes du second degré. Car soient V, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les angles que font avec l'axe des x la tangente au point M et les droites MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, qui joignent ce point aux quatre foyers ; l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{A}{B} \cdot \frac{u-a_1}{v-b_1} \cdot \frac{u-a_2}{v-b_2} \cdot \frac{u-a_3}{v-b_3} \cdot \frac{u-a_4}{v-b_4}$$

conduit, en posant

$$\frac{A}{B} = e^{2iK},$$

à la relation

(59) $$2V = 2K + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = M.\pi ,$$

et cette relation donne pour l'angle V deux valeurs, différentes de $\frac{\pi}{2}$; par conséquent, les tangentes aux deux courbes passant en un point du plan sont perpendiculaires. Ainsi, *l'équation* (56) *est intégrée par le système des cycliques planes, homofocales et orthogonales.*

Pour construire simplement la formule (59), il suffira de connaître la constante K, et, pour cela, de placer d'abord le point M sur le cercle focal. Mais nous n'insistons pas sur ce point de détail. Remarquons aussi que les formules de substitution (57), (58), interprétées géométriquement, donnent la transformation par rayons vecteurs réciproques dans le plan. Nous retrouvons donc cette proposition : *Toute cyclique plane est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une cyclique à deux axes de symétrie.*

Ces dernières cycliques ont été étudiées par M. Siebeck dans deux Mémoires importants (t. LVII et LIX du *Journal de Borchardt*). Les ovales de Descartes ont été considérées au même point de vue par l'auteur dans les *Annales de l'École Normale*. Signalons aussi des articles de M. Laguerre dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (1).

32.

De l'ellipse de Cassini.

On sait que l'équation de cette courbe, rapportée à ses axes de symétrie, est

$$(x^2+y^2)^2+a^2(x^2-y^2)+b^4=0.$$

C'est donc une cyclique; c'est aussi ce qui résulte de l'équation focale

$$rr'=k,$$

et cette dernière équation va nous permettre d'énoncer les propriétés caractéristiques de l'ellipse de Cassini.

Proposons-nous d'abord le problème suivant, résolu d'une manière générale par M. de la Gournerie (2) : Étant donnée

(1) Sur les applications de la Géométrie au Calcul Intégral. *Bulletin de la Société Philomathique*, 1867, p. 81.

(2) *Journal de Liouville*, t. XIV, 2e série. Mémoire sur les lignes spiriques.

une cyclique plane, définie par la conique déférente (K) et par le cercle directeur (A), déterminer les foyers singuliers de cette cyclique.

Nous avons vu que les foyers singuliers sont les points réels, situés sur les asymptotes de la cyclique. Nous savons aussi qu'étant donné un des cercles orthogonaux au cercle (A) et ayant son centre en m sur la conique (K), pour avoir les points de la courbe, il faut abaisser du centre O de (A) une perpendiculaire sur la tangente en m. Les points d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle appartiennent à la cyclique. L'un de ces points s'éloignera à l'infini dans le cas seulement où la tangente en M à la conique ira passer par un des points à l'infini sur le cercle, I par exemple. Alors la tangente à la cyclique sera la tangente au cercle, c'est-à-dire la tangente menée à la conique par le point I. On voit donc que les asymptotes de la cyclique seront les tangentes menées à la conique des deux points I et J; en d'autres termes, *les foyers singuliers de la cyclique seront les foyers ordinaires de la conique déférente.*

Cela posé, soit une ellipse de Cassini. Les points qu'on appelle d'ordinaire foyers de cette courbe, et qui donnent lieu lieu à l'équation

$$rr' = k,$$

seront à la fois des foyers ordinaires et des foyers singuliers. L'ellipse de Cassini s'obtiendra donc en prenant une conique déférente (K) à centre unique quelconque, et un cercle directeur concentrique à cette conique. D'ailleurs, comme les foyers de la conique (K) doivent aussi être foyers de la courbe, il faudra que le cercle (A) passe par les points de contact des tangentes menées à la conique de ses deux foyers. Cela nous conduit au mode suivant de génération :

On obtient la courbe de Cassini, en prenant une conique déférente quelconque (qui doit être une hyperbole, si la courbe est réelle), et pour cercle directeur le lieu des points

d'où l'on peut mener à la conique des tangentes rectangulaires.

Si l'hyperbole a son axe réel plus grand que l'axe imaginaire, la courbe est formée des deux ovales. Dans ce cas, les quatre foyers sont sur l'axe réel.

Si l'hyperbole a son axe imaginaire plus grand que l'axe réel, on obtient la courbe formée d'une seule branche. Deux des foyers réels sont sur l'axe imaginaire.

Enfin, si l'hyperbole est équilatère, c'est la lemniscate que l'on obtient.

Pour avoir les quatre foyers de la courbe, il suffira de mener des droites aux points I et J par les quatre points d'intersection de la conique déférente et du cercle.

Ce serait ici le lieu de montrer comment les propriétés des cycliques permettent de généraliser un théorème relatif à la lemniscate, et de donner un mode parfait de représentation des intégrales elliptiques par un arc de courbe. Mais ces propriétés peuvent, sans inconvénient, être détachées du travail actuel.

L'ellipse de Cassini fait partie des courbes que nous avons étudiées au n° 27. Son équation peut, en effet, s'écrire

$$(60) \qquad (u^2-c^2)(v^2-c^2)=a^4,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{u^2-c^2}{a^2}=\frac{a^2}{v^2-c^2},$$

et, par suite,

$$(u^2-c^2+\lambda a^2)(v^2-c^2+\lambda' a^2)=\lambda\lambda'\left(u^2-c^2+\frac{a^2}{\lambda'}\right)\left(v^2-c^2+\frac{a^2}{\lambda}\right),$$

équation de la forme

$$\mathrm{RR}'=k\,.\,rr';$$

et les nouveaux pôles seront déterminés par les équations

$$\begin{cases} u^2=c^2-\lambda a^2, \\ v^2=c^2-\lambda' a^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2=c^2-\dfrac{a^2}{\lambda'}, \\ v^2=c^2-\dfrac{a^2}{\lambda}. \end{cases}$$

Considérons un cas particulier,

$$\lambda = \lambda' = \frac{c^2}{a^2};$$

l'équation deviendra

$$u^2 v^2 = \frac{c^4}{a^4}\left(v^2 - c^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)\left(u^2 - c^2 + \frac{a^4}{c^2}\right).$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{a^2}{c^2}\rho^2 = \mathrm{RR}', \tag{61}$$

ρ désigne la distance au centre de la courbe; R, R′ sont évidemment les distances aux deux autres foyers déterminés par les formules

$$u^2 = v^2 = c^2 - \frac{a^4}{c^2}.$$

Donc, *le produit des distances aux deux seconds foyers est proportionnel au carré de la distance au centre.*

Il résulte de là que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une ellipse de Cassini est encore une ellipse de Cassini, si l'on met le pôle au centre. Seulement, pour la courbe formée d'une seule ovale, les deux foyers donnant lieu à la propriété focale $rr' = k$ passeront par la transformation sur l'axe perpendiculaire.

Nous allons maintenant développer la propriété des segments capables, en écrivant l'équation (60) sous la forme

$$\frac{u^2 - c^2 + a^2 e^{\alpha i}}{u^2 - c^2 + a^2 e^{\beta i}} = e^{(\alpha-\beta)i}\,\frac{v^2 - c^2 + a^2 e^{-\alpha i}}{v^2 - c^2 + a^2 e^{-\beta i}}. \tag{62}$$

D'après les propositions générales données plus haut, cette équation exprime que, si l'on considère les deux segments dont les extrémités sont données par les formules

$$u^2 = c^2 - a^2 e^{\alpha i}, \quad v^2 = c^2 - a^2 e^{-\alpha i},$$

pour la première extrémité, et

$$u^2 = c^2 - a^2 e^{\beta i}, \quad v^2 = c^2 - a^2 e^{-\beta i},$$

pour la seconde, la somme des angles sous lesquels on voit ces deux segments est constante. Donc,

Si l'on inscrit dans l'ellipse de Cassini un parallélogramme de même centre, la somme algébrique des angles sous lesquels on voit les côtés opposés d'un point de la courbe est constante.

Ces remarques servent d'application aux théorèmes généraux énoncés plus haut.

L'ellipse de Cassini n'est pas d'ailleurs la cyclique la plus générale ayant une équation de la forme

$$RR' = K \, . \, rr' \, .$$

Il semble même que cette équation, contenant 9 constantes, serait propre à représenter les cycliques planes les plus générales. Mais, comme on a démontré que cette équation peut conserver la même forme avec une infinité de systèmes de pôles, et que même l'un d'eux peut être choisi arbitrairement, on voit qu'elle ne contient, en réalité, que 7 constantes, et ne peut représenter toute cyclique. Nous verrons plus loin comment on peut rattacher tout cela aux théorèmes de Poncelet.

Les cycliques définies par l'équation

$$\text{(63)} \qquad \frac{MA \, . \, MA'}{MB \, . \, MB'} = K$$

forment, lorsque K varie, un système de cycliques, coupées à angle droit par les courbes satisfaisant à l'équation

$$\text{(64)} \qquad \widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = \text{const.}$$

Ces nouvelles courbes sont encore des cycliques. On a donc un système double orthogonal, formé exclusivement de cycliques.

Ce système comprend, comme cas particulier, celui des ellipses de Cassini et des hyperboles équilatères, qui a été étudié surtout par Lamé. Il suffit que deux des pôles, B, B′, servant à la définition du premier système, soient rejetés à l'infini. Toutes les cycliques du système général sont d'ailleurs

des transformées par rayons vecteurs réciproques de l'ellipse de Cassini.

33.

Des points associés à la surface de la sphère.

Les propriétés des points associés dans le plan ont leurs analogues dans la géométrie sphérique.

Si nous transformons une figure plane par rayons vecteurs réciproques, au plan correspond une sphère; aux droites du plan passant par le point I correspondent les génératrices d'un même système de la sphère. De même, aux droites passant par le point J correspondent les génératrices rectilignes du second système. On voit donc que toute génératrice de la sphère a un point réel, et que les génératrices d'un système sont imaginaires conjuguées de celles de l'autre. Donc, à un quadrilatère du plan, ayant pour sommets opposés les deux points I et J, correspond sur la sphère un quadrilatère rectiligne formé de deux génératrices de chaque système. Il résulte de là la construction des points P', Q', associés aux points P, Q.

Par les points P, Q on mènera les deux génératrices rectilignes de la sphère, qui passent en ces points. Ces deux génératrices se coupent en deux points P', Q' qu'on dira associés aux premiers. Il est clair que la droite P'Q' est la polaire de PQ, et, par conséquent, si l'un des couples, PQ, P'Q' est réel, l'autre sera nécessairement imaginaire.

Il est vrai que, dans le plan, nous faisions une distinction entre les points P', Q'. Si les points P et Q ont pour coordonnées

$$P\left\{\begin{array}{l} u = a\,, \\ v = a'\,, \end{array}\right. \qquad Q\left\{\begin{array}{l} u = b\,, \\ v = b'\,, \end{array}\right.$$

nous avons pris

$$P'\left\{\begin{array}{l} a = a\,, \\ v = b'. \end{array}\right. \qquad Q'\left\{\begin{array}{l} u = a'\,, \\ v = b\,. \end{array}\right.$$

(Voir art. 26). Mais ici la même distinction peut évidemment être faite ; car aux droites passant par le point I dans le plan correspondront, sur la sphère, les génératrices d'un système, que nous appelerons (I); et de même, aux droites passant par J dans le plan, les droites du second système, que nous distinguerons par la lettre (J), et qui sont imaginaires conjuguées des premières. Examinons maintenant les propriétés des points associés.

Le rapport $\frac{MP \cdot MQ}{MP' \cdot MQ'}$ des distances d'un point M aux quatre points P, Q, P', Q', étant égal à l'unité dans le plan, sera constant à la surface de la sphère, et l'on aura

$$(65) \qquad \frac{MP \cdot MQ}{PQ^2} = \pm \frac{MP' \cdot MQ'}{P'Q'^2}.$$

Donc *il y a sur la sphère un rapport constant entre le produit des distances d'un point quelconque* M *à deux points fixes,* P, Q, *et le produit des distances du même point aux deux points associés* P', Q'.

On peut transformer de même les relations relatives aux angles, et nous signalerons d'abord celle-ci. Si l'on joint le point M soit aux deux points P, Q, soit aux deux points P', Q', les deux couples de grands cercles ainsi obtenus auront mêmes bissectrices. On pourra substituer, sans que la propriété cesse d'exister, aux grands cercles des petits cercles assujettis à couper à angle droit un cercle fixe quelconque de la sphère.

Nous avons vu que, dans le plan, on a

$$e^{i \cdot \widehat{P'MQ'}} = \frac{MP}{MQ}.$$

Sur la sphère les droites MP, MQ, ... se transforment en petits cercles passant par le pôle. Si nous appelons ce pôle M', la relation précédente, transformée sans aucune difficulté par la méthode des rayons vecteurs réciproques, nous conduit au résultat suivant :

Soient deux petits cercles de la sphère passant, l'un par

M, M′, P′, l'autre par M, M′, Q′, et désignons leur angle par $\widehat{P'MQ'}$; on aura

$$e^{i.\widehat{P'MQ'}} = \frac{MP}{MQ} : \frac{M'P}{M'Q}, \tag{66}$$

M, M′ étant d'ailleurs des points quelconques de la sphère, et P, Q les points associés à P′, Q′. Cette relation est fondamentale, et nous allons en déduire plusieurs conséquences.

1° Les points M, M′ étant quelconques, on peut faire sur leur position différentes hypothèses particulières, et supposer, par exemple, qu'ils soient diamétralement opposés sur la sphère. Alors les cercles considérés plus haut sont les grands cercles passant par M et les points fixes P′, Q′. D'ailleurs, les distances M′P, M′Q deviennent égales aux distances MP_1, MQ_1 du point M aux points P_1, Q_1, diamétralement opposés à P et à Q, et la formule (66) devient

$$e^{i.\widehat{P'MQ'}} = \frac{MP}{MQ} : \frac{MP_1}{MQ_1} = \operatorname{tang} \frac{\frac{\text{arc } MP}{2}}{\frac{\text{arc } MP'}{2}} \tag{67}$$

Ainsi l'angle des deux arcs de grand cercle, menés du point M aux extrémités du segment P′Q′, s'exprime en fonction des distances de ce point M aux deux points fixes P, Q associés à P′, Q′, et aux deux points P_1, Q_1 diamétralement opposés à P et à Q. Cette formule est analogue à l'équation (40) relative au plan; elle ne constitue pas cependant, comme nous allons le voir, la véritable généralisation de cette formule.

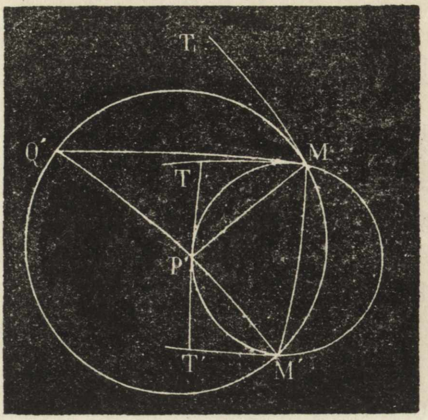
2° Supposons que dans la formule (66) le point M′, qui est quelconque, ait été placé sur l'arc de grand cercle P′Q′; alors on aura

$$M'P = M'Q,$$

puisque les points P et Q sont placés symétriquement par rapport à l'arc P′Q′, et la formule (66) deviendra

$$\frac{MP}{MQ} = e^{i.\widehat{P'MQ'}}.$$

Cela posé, je dis que l'angle P'MQ' ou TMT_1 des deux petits



cercles s'exprime en fonction des angles du triangle sphérique MP'Q' par la formule

(68) $$2\widehat{P'MQ'} = M - P' - Q' + \pi.$$

En effet, menons les arcs tangents en M, M', P'. D'après les propriétés du cercle, les angles suivants seront égaux,

$$TP'M = TMP', \quad T'P'M' = T'M'P', \quad TMM' = T'M'M,$$

et par conséquent on aura

$$2TMM' = P'MM' + P'M'M + \pi - MP'M'.$$

En appliquant la même relation au second petit cercle, on aura

$$2T_1MM' = Q'MM' + Q'M'M + \pi - MQ'M'.$$

En retranchant de cette équation la précédente, on trouve

$$2T_1MT = Q'MP' - MQ'M' + MP'M',$$

équation équivalente à la formule (68), qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi l'angle des deux petits cercles s'exprime par la formule

$$\frac{M - P' - Q' + \pi}{2}.$$

M, P', Q' étant les angles du triangle sphérique $MP'Q'$.

L'expression précédente est susceptible d'une interprétation géométrique simple. A cet effet, considérons, en même temps que P', Q', les points diamétralement opposés P'_1, Q'_1. *L'expression précédente est égale à* $\frac{S}{2}$, S *étant l'aire du triangle sphérique* $MP'_1Q'_1$, et l'on a

$$\frac{MP}{MQ} = e^{i\frac{S}{2}}. \tag{69}$$

Ainsi, *le rapport des distances d'un point quelconque* M *de la sphère à deux points* P, Q *de cette surface est égal à* $e^{i\frac{S}{2}}$, S *désignant l'aire du triangle sphérique formé par le point* M *et les points* P'_1, Q'_1, *diamétralement opposés aux points* P', Q', *associés à* P *et à* Q.

Nous ne devons pas dissimuler que la formule et la démonstration précédentes présentent quelques difficultés quant aux signes. Ces difficultés, sur lesquelles nous reviendrons dans une autre occasion, et qu'on lèvera dans chaque cas particulier, tiennent à la convention faite par les auteurs de Trigonométrie de détruire la continuité, et de ne considérer que les triangles dont les côtés sont inférieurs à π. La règle à suivre est la suivante. On prendra le même signe pour toutes les aires correspondantes à un sens de rotation déterminé autour des côtés du triangle, et des signes opposés quand les sens de rotation seront différents.

La formule (69) peut être employée sur la sphère de la même manière que l'équation (40) relative au plan. Elle donne, comme cette dernière, une transformation du rapport $\frac{MP}{MQ}$ de deux distances seulement, tandis que la formule (67), qu'on pourrait d'ailleurs déduire de la précédente, contient quatre distances MP, MQ, $M'P$, $M'Q$.

Ainsi, quand les deux points P, Q deviennent imaginaires conjugués, le rapport des distances du point M à ces deux

points s'exprimera en fonction de l'aire d'un triangle sphérique réel.

Sous ce point de vue, c'est le théorème de Lexell, relatif aux triangles sphériques d'aire constante, qui constitue, sur la sphère, la propriété analogue à celle des angles inscrits dans les cercles du plan. Car on sait, d'après ce théorème, qu'étant donnés deux points quelconques P, Q d'un petit cercle, le triangle sphérique formé par les points diamétralement opposés P_1, Q_1, et par un point M du cercle, conservera une aire constante, quand le point M décrira le petit cercle.

On retrouverait exactement, comme à l'article 26, les propriétés focales des coniques sphériques.

34.

Des courbes sphériques analogues aux courbes planes déjà considérées.

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre à la sphère les propriétés signalées à l'article 7, et qui conviennent à une classe étendue de courbes planes.

Prenons sur la sphère deux séries de pôles fixes,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

et appelons R_i, r_i les distances d'un point M aux pôles A_i, B_i des deux séries. Les courbes sphériques que nous allons considérer sont définies par l'équation

$$R_1 R_2 \ldots R_n = k \cdot r_1 r_2 \ldots r_n. \tag{70}$$

Ces courbes donnent lieu à des propositions plus nombreuses que les courbes planes correspondantes.

D'abord, si l'on effectue leur projection stéréographique sur un plan, la forme de l'équation précédente (70) ne change pas. On voit donc que ces courbes sphériques sont les transformées par rayons vecteurs réciproques des courbes planes déjà étu-

diées, et, par conséquent, en tenant compte de la propriété énoncée (art. 27), nous obtiendrons le théorème suivant :

Quand une courbe sphérique est telle qu'il y ait un rapport constant entre les produits de ses distances à deux séries de pôles fixes pris sur la sphère, elle jouit des mêmes propriétés avec une infinité d'autres séries de pôles fixes, situés aussi sur la sphère, et l'un des nouveaux pôles peut même être choisi arbitrairement.

Supposons que l'on se donne un des pôles A_1, et que l'on demande de trouver les pôles qui lui sont associés. On mènera le plan tangent en A_1, contenant deux génératrices de la sphère qui couperont la courbe en deux groupes de n points imaginaires,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$
$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n.$$

On joindra les points du premier groupe à ceux du second, et l'on aura ainsi n arcs de grand cercle. Les pôles B_i de l'une des séries seront les symétriques de A_1 par rapport à ces n arcs de grand cercle. En opérant la construction précédente sur un de ces pôles B_i, on retrouvera A_1 et les $(n-1)$ pôles A_i, qui doivent lui être adjoints dans la première série.

Les arcs de grand cercle joignant les points du premier groupe α'_i peuvent d'ailleurs être pris d'une manière quelconque; mais il est clair qu'ils ne seront réels que si l'on joint chaque point imaginaire α_i à son conjugué α'_i. La construction que nous donnons ici est d'ailleurs une conséquence immédiate de ce fait évident que deux pôles appartenant à deux séries différentes, considérés comme des cercles de rayon nul, se coupent en deux points de la courbe.

Revenons au cas général, et considérons, en même temps que la courbe sphérique, la courbe plane qui en est la projection stéréographique. Nous avons vu, formule (45), qu'on pouvait choisir pour la courbe plane une infinité de pôles, tels que les pôles de la 2e série soient imaginaires conjugués de ceux de la première. La transformation par rayons vecteurs réciproques conserve cette relation. On pourra donc trouver

sur la sphère deux séries de pôles imaginaires de la courbe, tels que les pôles de l'une des séries soient conjugués de ceux de l'autre. Appelons R_i, r_i les distances d'un point M de la courbe à deux pôles imaginaires conjugués A_i, B_i, et S_i l'aire du triangle sphérique formé par le point M et les deux points fixes réels A'_i, B'_i, diamétralement opposés aux points associés à A_i, B_i. On aura

$$\frac{R_i}{r_i} = e^{\frac{S_i}{2}\sqrt{-1}},$$

et comme l'équation de la courbe peut s'écrire

$$\frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdots \frac{R_n}{r_n} = k,$$

on voit que l'on aura

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \text{const.}$$

Ainsi, *quand une courbe sphérique est telle qu'il y ait un rapport constant entre les produits des distances d'un de ses points à une première série de n pôles et le produit des distances du même point à une deuxième série de n pôles, situés comme les premiers sur la sphère, elle possède, et d'une infinité de manières, la propriété que la somme des aires des n triangles sphériques, formés avec un de ses points comme sommet et n segments fixes comme bases, soit constante.*

Les extrémités de ces n segments décrivent d'ailleurs la courbe sphérique diamétralement opposée à la proposée.

L'énoncé précédent peut même être complété, et l'on peut dire que toute courbe qui jouit de l'une ou de l'autre des propriétés indiquées dans le théorème fait partie de la classe de courbes que nous étudions, et conserve par conséquent ces mêmes propriétés avec une infinité d'autres systèmes soit de pôles, soit de segments fixes.

Quelques cas particuliers dans lesquels les deux séries de pôles ont une disposition particulière méritent d'être signalés.

35.

Des courbes sphériques pour lesquelles les pôles de chaque série sont deux à deux diamétralement opposés. Propriétés correspondantes des cônes algébriques, ayant ces courbes pour base.

Si les pôles de chacune des deux séries qui servent à définir la courbe sont deux à deux diamétralement opposés, la courbe définie par ces deux séries de *n* pôles sera évidemment symétrique par rapport au centre de la sphère. Nous allons voir que, parmi les nouveaux systèmes de pôles qu'on peut substituer aux premiers, il y en a une infinité qui sont, comme les premiers, deux à deux diamétralement opposés dans chaque série.

En effet, quand on fait la projection stéréographique de la sphère, deux points diamétralement opposés se projettent suivant deux points divisant harmoniquement les diamètres d'un cercle fixe du plan. Le carré k du rayon de ce cercle est négatif; le cercle n'a de réel que son centre. Prenons ce centre pour origine des coordonnées; l'équation de la courbe plane, projection de la courbe sphérique, sera

$$\varphi(u)\varphi_1(v) = \psi(u)\psi_1(v) .$$

Les pôles de la première série seront définis par les équations

$$(71) \qquad \begin{cases} \varphi(u) = Au^m + \cdots + A_m = 0 , \\ \varphi_1(v) = Av^m + \cdots + A'_m = 0 , \end{cases}$$

où A désigne une quantité réelle, A_m, A'_m des quantités imaginaires conjuguées. De même, les pôles de la 2e série seront donnés par le système semblable

$$(72) \qquad \begin{cases} \psi(u) = Bu^m + \cdots + B_m = 0 , \\ \psi_1(v) = Bv^m + \cdots + B'_m = 0 , \end{cases}$$

Cela posé, d'après les hypothèses faites, les pôles de chaque

série peuvent être groupés deux à deux, de telle manière que les points de chaque couple (u, v), (u_1, v_1) divisent harmoniquement un diamètre du cercle ayant son centre à l'origine, et pour rayon $\sqrt{k}$. On passera donc d'un de ces points à l'autre par les formules

$$u_1 = \frac{k}{v}, \qquad v_1 = \frac{k}{u},$$

et par suite les polynômes φ, φ_1, ψ, ψ_1 devront satisfaire aux équations

$$(73) \qquad \left\{ \begin{aligned} & v^m \varphi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{A} \varphi_1(v), \qquad u^m \varphi_1\left(\frac{k}{u}\right) = \frac{A'_m}{A} \varphi(u), \\ & v^m \psi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{B_m}{B} \psi_1(v), \qquad u^m \psi_1\left(\frac{k}{u}\right) = \frac{B'_m}{B} \psi(u). \end{aligned} \right.$$

Si, dans la deuxième de ces équations, on change u en $\frac{k}{v}$, et et qu'on la multiplie avec la première, elle donne

$$k^m = \frac{A_m A'_m}{A^2}.$$

On aurait de même

$$k^m = \frac{B_m B'_m}{B^2},$$

d'où résulte

$$\frac{A_m A'_m}{A^2} = \frac{B_m B'_m}{B^2}.$$

Cela posé, formons les nouveaux pôles. L'équation de la courbe [voir art. 27, équation (43)] prend la forme

$$(74) \qquad \Phi(u)\,\Phi_1(v) = \Psi(u)\,\Psi_1(v),$$

où les polynômes Φ, Φ_1, ... sont définis par les formules

$$(75) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \Phi(u) = \varphi(u) + \lambda\,\psi(u), \qquad \Phi_1(v) = \varphi_1(v) + \lambda'\psi_1(v), \\ & \Psi(u) = \psi(u) + \lambda'\varphi(u), \qquad \Psi_1(v) = \psi_1(v) + \lambda\,\varphi_1(v), \end{aligned} \right.$$

λ et λ' étant deux facteurs imaginaires conjugués. En égalant ces polynômes à zéro, on aura les nouveaux pôles de la courbe. Pour que ces points aient les mêmes dispositions que les pre-

miers, il suffira que les nouveaux polynômes Φ, Ψ satisfassent à des équations de la même forme que les formules (73). Or on a

$$v_m \Phi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{A}\left[\varphi_1(v) + \frac{\lambda A B_m}{A_m B}\psi_1(v)\right].$$

On aura donc

$$v_m \Phi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{A}\Phi_1(v),$$

et les équations semblables, en prenant

(76) $$\lambda\frac{A B_m}{B A_m} = \lambda', \quad \lambda'\frac{A B'_m}{B A'_m} = \lambda.$$

Ces deux équations se réduisent évidemment à une seule, la première. Il suffira donc que les indéterminées λ, λ' satisfassent à cette équation, pour que les nouveaux pôles aient la même disposition que les anciens.

Si l'on pose

$$A_m = A k^{\frac{m}{2}} e^{ia}, \quad A'_m = A k^{\frac{m}{2}} e^{-ia},$$
$$B_m = B k^{\frac{m}{2}} e^{ib}. \quad B'_m = B k^{\frac{m}{2}} e^{-ib},$$
$$\lambda = \mu e^{-\omega i}, \quad \lambda' = \mu e^{+\omega i},$$

on aura, en vertu de l'équation (76),

$$\omega = \frac{b-a}{2}.$$

μ demeurera quelconque. Ainsi, on trouve un nombre infini de systèmes de pôles, satisfaisant aux conditions posées. Ces pôles, satisfaisant aux équations

$$\Phi(u) = \varphi(u) + \lambda\psi(u) = 0,$$
$$\Phi_1(v) = \varphi_1(v) + \lambda'\psi_1(v) = 0,$$

sont, en vertu de l'équation (76), sur la courbe

(77) $$\frac{\varphi_1(v)}{\varphi(u)} = \frac{A B_m}{B A_m}\frac{\psi_1(v)}{\psi(u)},$$

courbe qui n'est pas indécomposable, et qui comprend le

cercle $uv=k$. La courbe précédente fait partie de celles qui coupent la première à angle droit. Mais nous nous contentons d'indiquer ces résultats.

Il est donc démontré que, si une courbe sphérique est définie par deux séries de pôles, telles que les pôles de chaque série soient deux à deux diamétralement opposés, la même propriété subsiste avec une infinité d'autres pôles, assujettis à décrire une courbe, d'un ordre inférieur de deux unités, et orthogonale à la proposée. Cette disposition particulière donne lieu à un théorème nouveau.

En effet, le produit des distances d'un point M de la sphère à deux points diamétralement opposés α, α' est évidemment proportionnel au carré de la distance du point M à la droite $\alpha\alpha'$. La courbe sphérique est donc telle qu'il y a un rapport constant entre les produits des distances de l'un de ses points à deux séries de diamètres de la sphère; et comme cette définition convient aussi au cône ayant le centre de la sphère pour sommet et la courbe pour base, nous avons, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, le théorème suivant :

Quand un cône est tel qu'il y ait un rapport constant entre les produits des distances de l'un de ses points à deux séries distinctes de droites passant à son sommet, il conserve la même définition avec une infinité d'autres séries de droites passant également par son sommet, décrivant un cône algébrique orthogonal au premier et d'un degré inférieur d'une unité.

Le cas le plus simple de cette proposition a été étudié par M. Chasles. Le cône du second degré, tel qu'il y ait un rapport constant entre les distances d'un de ses points à deux droites fixes, conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes des deux droites, situées dans le plan des premières.

La propriété relative à la somme des aires des triangles sphériques prend ici une forme particulière. En effet, quand les pôles de chaque série deviennent imaginaires, les points associés sont diamétralement opposés. En associant les triangles sphériques dont les sommets sont diamétralement opposés,

on voit que, dans ce cas, la somme algébrique de leurs aires est égale à la somme des angles à la base, et l'on peut énoncer cette proposition :

Quand une courbe sphérique est telle qu'il y ait un rapport constant entre les produits des distances de ses points à deux séries de n diamètres, on peut former d'une infinité de manières n segments ayant leurs extrémités sur la courbe, et tels que la somme des angles à la base des triangles sphériques formés avec ces segments comme bases, et ayant tous pour sommet un même point variable de la courbe, soit constante.

On pourrait évidemment ajouter un grand nombre de propositions aux précédentes. Mais peut-être le lecteur trouvera-t-il que nous avons déjà été trop long.

36.

Des courbes lieux des points desquels on voit plusieurs segments de grand cercle sous des angles dont la somme est nulle.

Ces courbes forment une nouvelle classe particulière des courbes sphériques que nous étudions. En effet, l'angle de deux arcs de grand cercle MA, MB, joignant le point M aux deux points A et B, est évidemment égal à la somme des aires des triangles sphériques MAB, MA'B'; A', B' étant les points diamétralement opposés à A, B. Les courbes que nous allons étudier sont, par conséquent, telles que la somme des aires des triangles sphériques formés avec un point de la courbe et $2n$ segments fixes, deux à deux diamétralement opposés, soit constante. Elles sont donc comprises dans la définition générale donnée au n° 33, et elles correspondent à une disposition particulière des pôles, qu'on peut caractériser en disant que ceux-ci sont en nombre pair dans chaque série, et que les pôles de l'une des séries sont diamétralement opposés à ceux de l'autre.

Ces courbes nouvelles ont donc toutes les propriétés appar-

tenant aux courbes générales, et signalées au n° 33; on peut les engendrer au moyen de deux séries de $2n$ pôles, un des pôles étant placé en un point quelconque de la sphère, etc. Mais la question qu'il importe d'examiner est la suivante : Peut-on conserver leur définition particulière et trouver, de plus d'une manière, n segments tels que la somme des angles sous lesquels on voit ces n segments conserve une valeur constante pour chaque point de la courbe?

Il est clair que cette question revient à la suivante : Peut-on trouver de nouveaux systèmes de pôles tels que les pôles de chaque série soient diamétralement opposés à ceux de l'autre?

A cet effet, reprenons les équations du numéro précédent, qui s'appliquent à la courbe plane, projection stéréographique,

$$\varphi(u)\,\varphi_1(v) = \psi(u)\,\psi_1(v),$$

et la nouvelle équation

$$\Phi(u)\,\Phi_1(v) = \Psi(u)\,\Psi_1(v).$$

En raisonnant comme à l'article précédent, on verra que les fonctions φ, ψ satisfont ici aux équations identiques

$$(78)\qquad \left\{\begin{aligned} v^m\varphi\left(\frac{k}{v}\right) &= \frac{A_m}{B}\psi_1(v), &\quad u^m\varphi_1\left(\frac{k}{u}\right) &= \frac{A'_m}{B}\psi(u),\\ v^m\psi\left(\frac{k}{v}\right) &= \frac{B_m}{A}\varphi_1(v), &\quad u^m\psi_1\left(\frac{k}{u}\right) &= \frac{B'_m}{A}\varphi(u).\end{aligned}\right.$$

On déduit de là, en s'appuyant sur les équations déjà données pour Φ, Ψ,

$$v^m\Phi\left(\frac{k}{v}\right) = \frac{A_m}{B}\left[\psi_1(v) + \frac{\lambda B B_m}{A A_m}\varphi_1(v)\right].$$

Pour que le second membre se réduise à $\Psi_1(v)$ à un facteur constant près, il faut et il suffit que l'on ait

$$(79)\qquad \frac{A A_m}{B B_m} = 1.$$

Cette relation n'est pas satisfaite en général. Par suite, dans la définition posée au commencement de cet article, on ne

pourra pas, en général, substituer aux segments fixes des segments donnant lieu aux mêmes propriétés. Mais il n'en sera plus ainsi si $\frac{AA_m}{BB_m}=1$.

Interprétons d'abord cette condition. Elle signifie, en tenant compte des identités (79), que l'équation de la courbe est vérifiée par la valeur

$$u=\frac{k}{v},$$

c'est-à-dire que la courbe contient le cercle

$$uv=k.$$

Ce cercle étant la projection stéréographique du cercle de l'infini sur la sphère, il résulte de là que, lorsque la condition (79) sera satisfaite, la courbe sphérique se décomposera et contiendra le cercle de l'infini; par suite, la somme des angles des triangles sphériques sera nulle. Donc,

Si l'on considère sur la sphère la courbe telle que la somme des angles, formés autour d'un quelconque de ses points M, *des triangles sphériques ayant tous ce point pour sommet, et pour bases respectivement n segments fixes, soit constante, on ne pourra substituer à ces segments fixes d'autres segments donnant lieu aux mêmes propriétés que dans le cas où la somme constante des angles sera nulle ou égale à un multiple de* π.

Par exemple, le lieu des foyers des coniques sphériques inscrites dans un quadrilatère formé de quatre grands cercles est tel que la différence des angles sous lesquels on voit deux côtés opposés du quadrilatère sphérique est nulle. Cette courbe conservera les mêmes propriétés avec d'autres quadrilatères, c'est-à-dire sera le lieu des foyers des coniques sphériques inscrites dans toute une série de quadrilatères.

37.

Des systèmes orthogonaux formés à la surface de la sphère avec les courbes précédentes.

Il est clair que les propriétés démontrées au n° 25 pour les systèmes orthogonaux de courbes planes s'étendent aux courbes sphériques, et nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

Quand des courbes sphériques sont telles que les produits de leurs distances à deux séries de pôles fixes

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

conservent un rapport constant pour chaque courbe, elles sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points M, pour lesquels les triangles sphériques $MA'_iB'_i$ ont des aires dont la somme demeure constante pour chaque courbe, les points A'_i, B'_i étant diamétralement opposés aux points A_i, B_i.

Quand des courbes sphériques sont telles que les produits de leurs distances à deux séries de diamètres fixes

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$
$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

conservent un rapport constant pour chaque courbe, elles sont coupées à angle droit par les courbes sphériques lieux des points M pour lesquels les angles formés par les arcs de grand cercle $M\Delta_i$, ME_i conservent une somme qui demeure constante pour chaque courbe.

Enfin on peut citer le théorème suivant, énoncé par M. Michael Roberts (1) :

---

(1) *Journal de Liouville*, t. X, 1re série, p. 251. « Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales. » Le système considéré par M. Roberts revient évidemment à celui que nous donnons dans le texte.

Quand des courbes sphériques sont telles qu'il y ait un rapport constant pour chacune d'elles entre le produit des distances d'un de leurs points à n pôles $A_1, A_2, \dots, A_n$ et le produit des distances aux n pôles diamétralement opposés $A'_1, A'_2, \dots, A_n$, elles sont coupées à angle droit par les courbes telles que la somme des angles MA_1A_2, MA_2A_3, ... soit constante.

On peut signaler, par exemple, le cas particulier suivant du 2e système général :

Tous les cônes tels qu'il y ait un rapport constant entre les distances de leurs points à deux diamètres fixes Δ, E coupent la sphère suivant une suite de coniques sphériques circonscrites à un quadrilatère rectiligne imaginaire de la sphère. Ces coniques sont coupées à angle droit par les courbes lieux des points M, pour lesquels les grands cercles M Δ et M E font un angle constant.

La courbe que nous rencontrons ici, et qui est le lieu des sommets des angles constants dont les côtés passent par deux points fixes de la sphère, appartient, comme on voit, à la classe des cycliques. C'est une courbe du 4e ordre, bicylindrique, transformée par rayons vecteurs réciproques d'une ellipse de Cassini.

38.

Démonstrations nouvelles des théorèmes de Poncelet, relatifs aux polygones inscrits et circonscrits aux coniques, déduites des principes précédents.

Les propositions qui précèdent nous conduisent d'une manière directe à une démonstration des théorèmes de Poncelet, qui paraît se distinguer de toutes les démonstrations connues, et que, pour ce motif, nous allons développer ici.

Soient un cône du second degré (H), et un angle polyèdre inscrit de même sommet, formé d'une suite de plans $P_1, P_2, \dots, P_n$.

On reconnaît sans difficulté que tous les points du cône satisferont à une équation de la forme

$$\frac{a_1}{P_1}+\frac{a_2}{P_2}+\cdots+\frac{a_n}{P_n}=0\,. \tag{80}$$

Il suffit de remarquer que cette équation est connue pour l'angle trièdre, qu'on la démontrera pour un angle tétraèdre en le décomposant en deux trièdres, en écrivant les équations relatives à ces deux trièdres, et éliminant par addition la face commune, etc.

Cela posé, supposons que les plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$, qui se coupent au sommet A du cône (H), soient tous tangents à une sphère (S); il est clair que l'angle polyèdre inscrit dans le cône sera en même temps circonscrit au cône (H_1) de sommet A, circonscrit lui-même à la sphère (S). Pour établir le théorème de Poncelet, il suffira de prouver que, s'il existe un tel angle polyèdre, inscrit à (H), circonscrit à (H_1), il y en a une infinité d'autres satisfaisant aux mêmes conditions.

A cet effet, cherchons l'équation de la courbe de section du cône (H) et de la sphère (S). D'après les principes développés dans la *Deuxième Partie*, il faudra remplacer dans l'équation (80) les quantités P_i, qui représentent les distances à un plan tangent, par R_i^2, R_i désignant la distance d'un point de la courbe au point de contact du plan tangent P_i. L'équation

$$\frac{a_1}{R_1^2}+\frac{a_2}{R_2^2}+\cdots+\frac{a_n}{R_n^2}=0 \tag{81}$$

conviendra donc à tous les points de la courbe; elle ne sera pas l'équation de la courbe, et, de même que l'équation (80) représente, en même temps que le cône (H), un cône de degré $n-2$, l'équation (81) représentera, en même temps que l'intersection de la sphère et de (H), une courbe de degré $2(n-2)$. Quoi qu'il en soit, l'équation (81) convient à tous les points de la courbe, et les pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont tous sur le petit cercle, intersection de la sphère et du plan polaire du sommet A du cône.

Réciproquement, si nous pouvons trouver une équation semblable à l'équation (81), les nouveaux pôles étant sur le même petit cercle, en remplaçant les nouvelles quantités R_i^2 par P_i, nous aurons une équation analogue à (80), qui devra représenter un cône identique au premier, puisqu'il a même sommet et même base sphérique. On pourra donc trouver une infinité d'équations de la forme (80), satisfaites pour tous les points du cône (H), c'est-à-dire une infinité d'angles polyèdres inscrits à (H) et circonscrits à (H_1). Nous sommes donc ramenés à la démonstration de la proposition suivante :

Quand une courbe sphérique est définie par l'équation (81), où les quantités R_i désignent des distances rectilignes à des pôles fixes situés sur un petit cercle, son équation conserve la même forme avec d'autres systèmes de pôles fixes situés sur le même petit cercle.

Comme l'équation (81) ne change pas de forme après une transformation par rayons vecteurs réciproques, on peut faire la projection stéréographique, en prenant le point de vue en un point quelconque du petit cercle qui contient les pôles, et nous n'aurons plus qu'à démontrer le théorème suivant :

Si une courbe plane est définie par l'équation (81), où les quantités R_i désignent des distances à des pôles fixes situés en ligne droite, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles fixes situés sur la même ligne droite que les premiers.

Or, cette dernière proposition peut se démontrer comme il suit :

Prenons la ligne des pôles pour axe des x; on aura

$$R_i^2 = (u - \alpha_i)(v - \alpha_i),$$

où α_i désigne une quantité réelle, abscisse du pôle de rang i, et, par suite, l'équation (81) prendra la forme

$$\sum \frac{a_i}{(u-\alpha_i)(v-\alpha_i)} = 0,$$

ou, en multipliant par $u-v$,

$$\sum \frac{a_i}{u-\alpha_i} = \sum \frac{a_i}{v-\alpha_i},$$

(82) $$\frac{f(u)}{\varphi(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)}.$$

Dans cette équation, $f(u)$ est de degré inférieur à $\varphi(u)$, et le polynôme $\varphi(u)$ a ses racines réelles. Mais toutes ces propriétés pourront être conservées, si l'on écrit cette équation sous la forme

(83) $$\frac{f(u)}{\varphi(u)+\lambda f(u)} = \frac{f(v)}{\varphi(v)+\lambda f(v)}.$$

En décomposant les deux membres en fractions simples, on reviendra à une équation de même forme que l'équation (81), mais *avec de nouveaux pôles*; c. q. f. d.

Il ne sera pas inutile de développer une autre démonstration des théorèmes de Poncelet, bien que cette démonstration ne s'applique qu'aux polygones de degré pair, parce qu'elle nous mettra sur la voie de propositions un peu plus générales que les théorèmes connus.

Si un angle polyèdre d'un nombre pair de faces est inscrit dans un cône (H) et circonscrit au cône (H_1), tous les points du cône (H) satisferont à une équation de la forme

$$P_1 P_2 \ldots P_n = Q_1 Q_2 \ldots Q_n,$$

où les plans P_i, Q_i sont tangents à la sphère, et par suite la cyclique, section de la sphère par le cône (H_1), satisfera à l'équation

(84) $$R_1 R_2 \ldots R_n = K . r_1 r_2 \ldots r_n .$$

D'une manière plus précise, cette équation représentera à la fois la cyclique située sur (H_1) et une courbe d'ordre $2n-4$.

On a vu d'ailleurs que, lorsqu'une courbe satisfait à une telle équation, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de pôles. Prenons un autre de ces

systèmes, formé de pôles réels. La nouvelle équation de notre courbe composée sera

(85) $$R'_1 R'_2 \ldots R'_n = K_1 . r'_1 r'_2 \ldots r'_n,$$

et, si l'on remplace les quantités R'_i, r'_i par P'_i, Q'_i, qui désignent les distances d'un point quelconque aux plans tangents de la sphère en R'_i, r'_i, l'équation

(86) $$P'_1 P'_2 \ldots P_n = h . Q'_1 Q'_2 \ldots Q'_n$$

représentera une surface d'ordre n, qui coupera la sphère suivant la courbe complète représentée par les équations (84) ou (85). Je dis que cette surface d'ordre n se décompose dans tous les cas en une surface du second ordre contenant la cyclique située sur (H_1) et en une autre surface d'ordre $n-2$ [1].

En effet, le plan P'_i coupe la surface suivant n droites, situées dans les plans Q'_i, et qui contiennent chacune deux points de la courbe sphérique; comme d'ailleurs ce plan P'_i est tangent à la sphère, il coupe la courbe complète (84) en $2n$ points imaginaires, dont quatre appartiennent à la cyclique. Appelons ces points

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2},$$
$$\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-2},$$

les points α_1, α_2, α'_1, α'_2 appartenant à la cyclique, les $2(n-2)$ autres au reste de la courbe. Les droites réelles joignant les points du premier groupe à ceux du second sont évidemment $\alpha_1\alpha'_1$, $\alpha_2\alpha'_2$, etc., car les quatre points de la cyclique sont imaginaires conjugués deux à deux. D'ailleurs ces n droites réelles sont évidemment les n droites de la surface (86), situées

---

[1] Cette surface d'ordre $n-2$ se décompose en réalité en surfaces du second degré, si n est pair; en surfaces du second degré et en un plan, si n est impair. Mais cette proposition, qui est une conséquence très simple du théorème principal, ne joue aucun rôle dans la démonstration que nous donnons ici.

dans le plan P'_i. Nous allons déduire de cette remarque la démonstration de la proposition que nous avons en vue.

Puisque chacun des plans P'_i, Q'_i contient deux droites s'appuyant sur la cyclique, toutes ces droites, en nombre $2n$, appartiennent évidemment à l'une des surfaces du second degré contenant la cyclique. Cette surface du second degré, coupant la surface (86) à la fois suivant $2n$ droites et suivant la cyclique, devra faire partie tout entière de cette surface d'ordre n. La proposition est donc démontrée.

D'ailleurs, étant donnée une quelconque des surfaces du second degré passant par la cyclique, cette surface est obtenue avec une infinité de systèmes de pôles; car il suffit de mener par une des génératrices de la surface deux plans tangents à la sphère. Les points de contact de ces plans tangents sont deux pôles appartenant à un même système et à deux séries différentes. On pourra donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un cône, si on peut lui inscrire un angle polyèdre de n faces circonscrit à la sphère, on pourra de même mener à la sphère une infinité de systèmes de n plans tangents, se coupant, dans un ordre déterminé, suivant les génératrices d'une surface du second degré passant par l'intersection de la sphère et du cône. La surface du second degré est une quelconque de celles qui contiennent la cyclique, et pour chacune d'elles, il y a une infinité de systèmes de n plans.

Transformons par la méthode des polaires réciproques.

Si l'on peut circonscrire à une conique (C) *un polygone inscrit dans une quadrique* (A), *non seulement on pourra construire une infinité de polygones ayant les mêmes propriétés, mais de plus, dans la courbe d'intersection de la surface* (A) *et de toute autre quadrique* (A') *inscrite dans la développable* $\boxed{AC}$, *on pourra inscrire une infinité de polygones formés des génératrices rectilignes de* (A).

Le théorème paraîtra plus simple, si nous en faisons encore une transformation par l'homographie.

Si dans une ligne de courbure d'un ellipsoïde on peut inscrire

un polygone de n côtés, formé avec les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde homofocal contenant cette ligne de courbure, on pourra inscrire une infinité de polygones semblables, formés avec les génératrices des hyperboloïdes homofocaux, non seulement dans la même ligne de courbure, mais encore dans toutes les autres lignes de courbure (1).

Pour les sections principales, ces polygones seront circonscrits à la focale et inscrits dans la section principale. Il en passera un par chaque point de toute ligne de courbure.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer comprennent deux parties distinctes.

1° Si l'on peut inscrire dans la courbe d'intersection de deux surfaces (A), (A′) un polygone formé des génératrices rectilignes de (A′), on pourra en inscrire une infinité d'autres formés de la même manière. Cette première proposition, comme M. Moutard en a fait le premier la remarque en 1864 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*), est au fond le théorème de Poncelet; elle s'en déduit par une simple perspective.

2° La même propriété subsiste, quand on substitue à (A′) toute surface (A″) inscrite dans la développable $\boxed{AA'}$. Cette proposition paraît nouvelle. Sa vérification analytique est extrêmement simple, et elle complète notre démonstration géométrique, qui ne s'appliquerait qu'aux polygones de degré pair.

39.

Transformation des propositions précédentes par la méthode des figures supplémentaires.

Les théorèmes donnés dans cette partie pour les courbes sphériques se transforment immédiatement par la méthode

(1) Ces polygones constituent des routes de lumière; leurs côtés adjacents viennent couper l'ellipsoïde sous des angles égaux.

des figures supplémentaires, et nous pouvons énoncer les propositions suivantes.

Si une courbe sphérique est telle que la somme des périmètres des *n* triangles sphériques interceptés par son arc tangent dans *n* angles fixes soit constante, elle conserve la même définition avec une infinité d'autres systèmes de *n* angles.

Si une courbe sphérique est telle que la somme des longueurs interceptées par son arc tangent sur *n* arcs de cercles fixes, à partir d'une origine fixe sur chaque arc, soit constante, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres systèmes d'arcs.

Si une courbe sphérique est telle que *n* angles interceptent sur son arc tangent des segments dont la somme algébrique soit nulle, elle conserve la même propriété, quand on substitue aux premiers une infinité de nouveaux angles fixes convenablement choisis.

Ces propositions, sur lesquelles nous n'insisterons pas, s'étendent évidemment aux courbes planes. Elles peuvent être considérées comme la généralisation de ce théorème : un cercle peut être considéré d'une infinité de manières comme l'enveloppe d'un arc de grand cercle interceptant dans un angle fixe un triangle sphérique de périmètre constant.

QUATRIÈME PARTIE.

Étude analytique des surfaces cyclides.

40.

Introduction.

Dans cette partie nous étudions les surfaces du 4e ordre qui ont le cercle de l'infini pour ligne double et les surfaces du 3e ordre qui contiennent ce cercle. Ces dernières surfaces se déduisent des précédentes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, et d'ailleurs, en leur adjoignant le plan de l'infini, on forme une surface du 4e ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double. Nous désignerons toutes ces surfaces sous la dénomination de *cyclides,* parce qu'elles contiennent dix séries de sections circulaires, et aussi parce qu'elles comprennent comme cas particulier la surface à lignes de courbure circulaires nommée *cyclide* par M. Dupin. Nous réserverons par suite à cette dernière surface le nom de cyclide de Dupin ou cyclide à lignes de courbure circulaires.

Ces surfaces ont été d'abord étudiées en 1864 par M. Moutard qui les a rencontrées en cherchant les surfaces *anallagmatiques,* c'est-à-dire qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation par rayons vecteurs réciproques convenablement choisie. Les cyclides sont donc les anallagmatiques les plus générales du 3e et du 4e ordre. M. Moutard a même montré qu'elles possédaient cette propriété par rapport à cinq pôles différents ; il a en outre étudié les cinq séries de sphères doublement tangentes, les sections circulaires formant

dix séries distinctes, et reconnu l'existence de cinq focales, lieux des sphères de rayon nul doublement tangentes à la surface (1).

Les surfaces cyclides comprennent, comme cas particuliers, plusieurs surfaces remarquables : le tore, la cyclide de Dupin, les podaires de quadrique, les transformées par rayons vecteurs réciproques de quadriques, les surfaces de révolution engendrées par la rotation de l'ellipse de Cassini, des ovales de Descartes, etc., autour de leur axe de symétrie. On les rencontre dans un grand nombre de problèmes. L'intérêt qu'elles présentent a été accru par la découverte, publiée à peu près simultanément par M. Moutard et par l'auteur, des lignes de courbure de ces surfaces. Les cyclides peuvent, en effet, faire partie d'un système triple orthogonal, tout à fait analogue à celui des quadriques homofocales.

Dans un travail présenté en 1866 comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris et inséré dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* (même année), j'ai étudié ces cyclides orthogonales et le système des coordonnées curvilignes auxquelles elles donnent lieu. D'un autre côté, M. Laguerre, dans une série de notes présentées à la Société Philomathique, a ajouté plusieurs propriétés à celles qu'avait données M. Moutard, et fait connaître, le plus souvent sans démonstration, des propositions élégantes, se rapportant soit aux sections circulaires, soit aux dispositions relatives des focales et des sphères principales des cyclides.

Il est juste de rappeler ici, bien que cet historique soit loin d'être complet, que les cyclides du 3e et du 4e ordre ne sont que des transformées par l'homographie de la surface du 4e ordre à conique double, que M. Kummer a étudiée le premier en 1863 (2), et dont il a reconnu les principales propriétés.

(1) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864. — *Bulletin de la Société Philomathique* et *Comptes rendus de l'Académie*, même année.

(2) *Kummer* : Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. (*Journal de Borchardt*, t. LXIV, p. 66, année 1863.)

Depuis, différents géomètres, et en particulier M. Clebsch, ont consacré des Mémoires importants et développés à l'étude de cette surface du 4e ordre. Je citerai en particulier le Mémoire de M. Clebsch publié en 1868 [1]. Dans ce travail se trouvent déterminées d'une manière complète les droites et les courbes les plus simples qu'on peut placer sur la surface.

Il est vrai qu'on peut, par une transformation homographique, déduire les propriétés des cyclides de celles de la surface du 4e ordre à conique double. Cependant l'étude directe des cyclides me paraît conserver de l'intérêt. Le choix particulier de la ligne double imprime un caractère remarquable de simplicité à l'étude de ces surfaces, et permet de découvrir des théorèmes dont l'énoncé serait trop compliqué ou peu intéressant quand la conique double est quelconque. Dans tous les cas, on pourra aussi étendre par l'homographie aux surfaces du 4e ordre à conique double et à la surface générale du 3e ordre les propositions trouvées dans la théorie des cyclides.

Nous commencerons par étudier les propriétés les plus élémentaires, et, en particulier, les sections circulaires, les focales, les cinq modes de génération des cyclides du 4e ordre.

41.

Propriétés générales des cyclides.

Soit la surface du 4e ordre représentée par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2u_1(x^2+y^2+z^2)+u_2=0\,, \tag{1}$$

où u_1 désigne un polynôme homogène du premier degré, et u_2 un polynôme quelconque du second degré. Cette équation

---

[1] *Clebsch* : Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen (*Journal de Borchardt*, t. LXIX, p. 355, année 1868).

contient 13 constantes. Du reste, elle représente la cyclide la plus générale du 4[e] ordre. On peut la mettre aussi sous la forme

(2) $$(x^2 + y^2 + z^2 + u_1)^2 = U_2 ,$$

où U_2 désigne encore un polynôme quelconque du second degré.

Puisque les cyclides ont le cercle de l'infini pour ligne double, toute sphère les coupera suivant une courbe du 4[e] ordre, située sur une surface du second degré, c'est-à-dire suivant une cyclique. C'est d'ailleurs ce qui résulte de l'équation même de la surface. Car, si nous cherchons l'intersection de la cyclide avec la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_1 ,$$

l'équation (1) de la cyclide pourra être remplacée par la suivante,

$$v_1^2 + 2u_1 v_1 + u_2 = 0 ,$$

qui représente une quadrique dont l'intersection avec la sphère sera la courbe cherchée.

L'équation de la surface met encore en évidence une série remarquable de quadriques inscrites dans la cyclide. Écrivons, en effet, l'équation (2) sous la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2 + u_1 + \lambda)^2 = U_2 + 2\lambda (u_1 + x^2 + y^2 + z^2) + \lambda^2 .$$

Les surfaces (V) représentées par l'équation

(3) $$U_2 + 2\lambda (u_1 + x^2 + y^2 + z^2) + \lambda^2 = V = 0 ,$$

où λ est une arbitraire quelconque, seront toutes tangentes à la cyclide en tous les points d'une courbe située sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + u_1 + \lambda = 0 .$$

Le centre de cette sphère demeure fixe, quand λ prend toutes les valeurs possibles.

Les quadriques (V), inscrites dans la cyclide, possèdent

plusieurs propriétés remarquables. D'abord, quand on connaîtra l'une d'elles (V), l'équation de la surface prendra la forme

$$S^2 = V,$$

où $S = 0$ représente une sphère de centre fixe.

En second lieu, elles sont homocycliques, c'est-à-dire, elles coupent toutes le cercle de l'infini aux mêmes points. Ces quatre points, communs à toutes les quadriques, sont ceux où les deux nappes de la cyclide, se croisant au cercle de l'infini, sont tangentes l'une à l'autre.

L'une des quadriques (V), correspondante à la valeur $\lambda = \infty$, se réduit à un plan double, le plan de l'infini.

Toute quadrique inscrite à une des surfaces (V) coupe la cyclide suivant une courbe du 8ᵉ ordre, qui se décompose en deux cycliques. En effet, l'équation de la cyclide est

$$S^2 = V.$$

Toute quadrique inscrite à V a pour équation

$$V = P^2.$$

On peut, en combinant cette équation avec celle de la cyclide, la remplacer par

$$S^2 = P^2, \quad S = \pm P,$$

équation qui représente deux sphères.

Réciproquement, toute quadrique coupant la cyclide suivant une courbe sphérique du 4ᵉ ordre sera tangente à l'une des quadriques (V). Car soit

$$(x^2 + y^2 + z^2 + u_1)^2 = U_2$$

l'équation déjà donnée de la cyclide. Si on la coupe par la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_1,$$

on trouve la quadrique

$$(v_1 + u_1)^2 = U_2,$$

qui est inscrite à (U_2). Or (U_2) est une quelconque des quadriques que nous avons appelées (V).

Il résulte des remarques précédentes quelques conséquences intéressantes.

En général, si l'on cherche l'intersection d'une droite δ avec la cyclide, on a une équation du 4e degré, ne présentant aucune propriété particulière, et dont la résolution complète exige la résolution préalable d'une équation cubique. Si la droite δ, au contraire, est tangente à une des quadriques V, l'équation du 4e degré qui détermine ses intersections avec la cyclide se résout par de simples extractions de racines carrées; car par la droite δ on peut faire passer une quadrique inscrite dans (V). Cette quadrique coupera la cyclide suivant deux courbes sphériques, et il n'y aura plus qu'à chercher l'intersection de δ avec les sphères contenant ces deux courbes.

Il suit de là que, étant donnée une droite δ, l'équation du 4e degré qui détermine ses points d'intersection avec la cyclide se résoudra complètement au moyen de l'équation cubique qui détermine les trois quadriques (V) tangentes à la droite δ. Chaque racine de cette équation cubique donnera une décomposition de deux facteurs quadratiques de l'équation du 4e degré.

Le théorème de géométrie suivant explique et met en lumière le fait analytique que nous venons de constater.

Si par deux points fixes a, a' d'une cyclide on fait passer une série de cercles coupant la cyclide en deux nouveaux points variables m, m', les droites mm' enveloppent une quadrique (V) *inscrite dans la cyclide et tangente à la droite aa'. Cette quadrique demeure la même si aux deux points a, a' on substitue les points a'', a''', où la droite aa' coupe de nouveau la cyclide.*

Ce théorème (dont la démonstration est une conséquence de l'art. 15) montre bien qu'à chaque décomposition des quatre points a, a', a'', a''' en deux groupes de deux correspond une des quadriques (V) tangentes à la droite $aa'a''a'''$. D'ailleurs, si l'on connaît une de ces quadriques (V), il suffira de lui mener

une tangente rencontrant la droite $aa'a''a'''$. Cette tangente coupera la cyclide en quatre points b, b'; b'', b''', déterminés par couples. Les points a, a' seront sur un cercle passant par b, b', et les points a'', a''' sur un cercle passant par b'', b'''. Ces propriétés entraînent la décomposition en deux facteurs de l'équation du 4e degré qui détermine les points a, a', a'', a'''.

On peut généraliser le théorème précédent de la manière suivante :

Si par deux points a, a' de la cyclide on fait passer une sphère quelconque, la coupant suivant une cyclique, les sécantes doubles de cette cyclique qui rencontrent la droite aa' enveloppent une des quadriques (V) *tangente à aa'*.

42.

Des sphères doublement tangentes aux cyclides.

On sait que, lorsque deux surfaces sont tangentes en un point, leur courbe d'intersection a pour point multiple, généralement pour point double, le point de contact. Il suit de là que toute sphère doublement tangente à la cyclide, la coupera suivant une cyclique à deux points doubles, c'est-à-dire suivant deux cercles. Réciproquement, toute sphère passant par un cercle de la surface, la coupera suivant un autre cercle, et par suite sera doublement tangente à la cyclide. La recherche des sections circulaires est donc comprise comme cas particulier dans celle des sphères doublement tangentes à la surface.

Nous prendrons pour point de départ l'équation (2), déjà donnée,

$$(x^2+y^2+z^2+u_1)^2 = U_2,$$

et nous observerons qu'en changeant la direction des axes coordonnés de manière que les nouveaux axes soient parallèles aux axes de symétrie de la quadrique (U_2), on peut faire disparaître les rectangles dans le polynôme U_2. Puis, en déplaçant

les axes parallèlement à eux-mêmes, on pourra supprimer le polynôme u_1, et ramener l'équation de la cyclide à la forme simple

$$(4)\quad \begin{cases} K = (x^2+y^2+z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 \\ \qquad + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0 . \end{cases}$$

Coupons la surface par la sphère (T) dont l'équation est

$$T = x^2 + y^2 + z^2 - 2P = 0 ,$$
$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta^2 .$$

α, β, γ, seront les coordonnées du centre de la sphère et la courbe d'intersection pourra être représentée par les équations

$$(5)\quad \begin{cases} P^2 + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 , \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2P = 0 . \end{cases}$$

Si l'on demande que la sphère (T) coupe la cyclide suivant deux cercles, il faudra exprimer que, par l'intersection des deux quadriques (5), on peut faire passer un système de deux plans. A cet effet, multiplions la seconde équation par λ, retranchons-en la première, et exprimons que l'équation ainsi obtenue représente deux plans.

Par un calcul qui ne présente aucune difficulté particulière, nous obtenons les trois équations de condition suivantes,

$$(6)\quad \frac{C^2}{\lambda - A} + \frac{C'^2}{\lambda - A'} + \frac{C''^2}{L - A''} + D - \lambda^2 = L = 0 ,$$

$$(7)\quad \frac{\alpha^2}{\lambda - A} + \frac{\beta^2}{\lambda - A'} + \frac{\gamma^2}{\lambda - A''} = 1 ,$$

$$(8)\quad \delta^2 = -\lambda - \frac{C\alpha}{\lambda - A} - \frac{C'\beta}{\lambda - A'} - \frac{C''\gamma}{\lambda - A''} .$$

La première de ces équations, dont nous avons désigné, pour abréger, le premier membre par L, ne contient que l'inconnue λ, et elle détermine cinq valeurs pour cette inconnue. Il suit de là que les sphères doublement tangentes à la surface se partagent en cinq séries distinctes.

Quand λ est connu, la deuxième équation devient une relation entre α, β, γ. C'est donc, si l'on y regarde α, β, γ comme variables, l'équation du lieu des centres des sphères doublement tangentes. Nous voyons que les sphères de chaque série ont leurs centres sur une quadrique, et la forme de l'équation (7) nous montre que les cinq quadriques correspondantes aux cinq valeurs de λ sont homofocales.

Enfin l'équation (8) fait connaître δ^2, c'est-à-dire le rayon de chacune des sphères doublement tangentes, quand le centre est déjà connu.

L'équation

$$(9)\quad x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+2\lambda-\frac{2C\alpha}{\lambda-A}-\frac{2C'\beta}{\lambda-A'}-\frac{2C''\gamma}{\lambda-A''}=0$$

représente donc toute sphère doublement tangente à la cyclide, pourvu que λ soit une racine de l'équation (6), et que α, β, γ satisfassent à l'équation (7). Comme l'équation (9) contient α, β, γ au premier degré, on voit que toutes les sphères doublement tangentes d'une même série auront même centre radical. Les coordonnées de ce centre sont

$$(10)\qquad x=-\frac{C}{\lambda-A},\quad y=-\frac{C'}{\lambda-A'},\quad z=-\frac{C''}{\lambda-A''},$$

et sa puissance commune par rapport à toutes les sphères a pour expression

$$\frac{C^2}{(\lambda-A)^2}+\frac{C'^2}{(\lambda-A')}+\frac{C''^2}{(\lambda-A'')^2}+2\lambda=-L',$$

L' désignant la dérivée de L par rapport à λ.

La sphère décrite du centre radical comme centre avec $\sqrt{-L'}$ pour rayon coupe donc à angles droits toutes les sphères doublement tangentes à la cyclide faisant partie de la série considérée. L'équation de cette sphère est

$$(11)\qquad x^2+y^2+z^2+\frac{2Cx}{\lambda-A}+\frac{2C'y}{\lambda-A'}+\frac{2C''z}{\lambda-A''}-2\lambda=0.$$

Remarquons, de plus, que le rayon $\sqrt{-L'}$ ne sera nul que

si λ est une racine multiple de l'équation (6). Dans ce cas particulier, toutes les sphères doublement tangentes à la cyclide faisant partie de la série considérée passeront par un point fixe, le centre radical déterminé par les équations (10).

L'équation (6) a, en général, cinq racines distinctes. Trois d'entre elles au moins sont réelles, et, si l'on suppose A, A', A'' rangés par ordre de grandeur croissante, on reconnaîtra, par les substitutions, que, dans les trois intervalles formés par $A, A', A'', +\infty$, il y a au moins une et quelquefois trois racines de l'équation. Il ne peut donc se présenter que deux cas généraux distincts. L'équation en λ aura toutes ses racines réelles, ou bien elle aura deux racines imaginaires.

Il résulte de ce qui précède la proposition suivante :

Une cyclide du 4e ordre peut, en général, être considérée de cinq manières différentes comme l'enveloppe d'une série de sphères qui coupent à angles droits une sphère fixe, et dont les centres décrivent une quadrique fixe.

Chacun de ces cinq modes de génération est défini par une sphère (S), que nous appellerons, avec M. de la Gournerie, *sphère directrice*, et par une quadrique (A), que nous appellerons *surface déférente.*

La cyclide est donc l'enveloppe des sphères ayant leur centre sur (A) et coupant (S) à angle droit. Ces sphères sont doublement tangentes à la cyclide, et la coupent suivant deux cercles réels ou imaginaires, se croisant aux deux points de contact de la sphère.

Réciproquement, l'enveloppe des sphères ayant leur centre sur une quadrique et coupant à angles droits une sphère fixe, est une cyclide. Cela résulte d'un calcul direct que nous omettons, et aussi de ceux qui précèdent. Car nous ne trouvons aucune relation particulière entre la quadrique (A) et la sphère (S), qui définissent chaque mode de génération des cyclides.

Les sphères doublement tangentes d'une même série demeurent invariables si on les transforme par rayons vecteurs

réciproques, en prenant pour pôle de transformation le centre, et pour module le rayon de la sphère directrice, qui est ainsi le lieu des points se correspondant à eux-mêmes. Puisque les sphères doublement tangentes demeurent invariables, il en sera de même de leur enveloppe, la cyclide. Celle-ci est donc *anallagmatique* suivant la définition de M. Moutard. Elle l'est d'ailleurs de cinq manières différentes, correspondantes aux cinq séries de sphères doublement tangentes.

Sans entrer dès à présent dans l'examen détaillé des relations entre les cinq modes de génération, il sera bon de rappeler que les cinq quadriques déférentes (A_i) sont homofocales, et de remarquer que les cinq sphères directrices (S_i) sont orthogonales.

Cette proposition se vérifie sans difficulté sur les équations précédentes, ainsi que la suivante : Étant donné un des modes de génération, défini par (S_i), (A_i), les centres des quatre autres sphères sont les sommets du tétraèdre conjugué à (S_i) et à (A_i).

43.

Des plans tangents doubles et des focales des cyclides.

Les plans tangents doubles peuvent être obtenus comme limites des sphères doublement tangentes. Les sphères d'une même série, étant assujetties à demeurer orthogonales à la sphère directrice (S), se transformeront, quand leur centre sera à l'infini, en des plans passant par le centre de (S). D'ailleurs, ces plans seront perpendiculaires aux directions asymptotiques de la déférente (A). Les plans tangents doubles enveloppent donc un cône du second degré, ayant son sommet au centre de la sphère directrice (S), et supplémentaire du cône asymptote de la quadrique (A).

On a donc *cinq séries de plans tangents doubles, tangents à cinq cônes du second degré, ayant pour sommets les centres des sphères directrices*. Ces cônes, étant supplémentaires des cônes

asymptotes des cinq quadriques homofocales, sont homocycliques.

On peut d'ailleurs obtenir leurs équations, en les considérant comme des quadriques inscrites dans la cyclide. En effet, l'équation

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&(A-\lambda)x^2+(A'-\lambda)y^2+(A''-\lambda)z^2+2Cx+2C'y+2C''z\\&\qquad+D-\lambda^2=0,\end{aligned}\right.$$

analogue à l'équation (3), représente toute quadrique (V) inscrite dans la cyclide. Cette quadrique sera un cône, si l'on a

$$\frac{C^2}{\lambda-A}+\frac{C'^2}{\lambda-A'}+\frac{C''^2}{\lambda-A''}+D-\lambda^2=0.$$

C'est l'équation déjà obtenue pour λ.

On a donc cinq cônes inscrits, c'est-à-dire dont les plans tangents seront plans tangents doubles de la cyclide, et la couperont, par conséquent, suivant deux cercles. L'équation de la cyclide sera

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2+2\lambda)^2+4(A-\lambda)x^2+4(A'-\lambda)y^2+4(A''-\lambda)z^2\\&\qquad+8Cx+8C'y+8C''z+4D-4\lambda^2=0.\end{aligned}\right.$$

Nous voyons, sur l'équation (12), que le cône ne sera réel que si λ est compris entre A et A″, c'est-à-dire si la surface déférente correspondante est un des deux hyperboloïdes. Comme le premier membre de l'équation (12) est négatif, d'après l'équation (13), pour tous les points de la cyclide, cette surface sera tout entière à l'intérieur, ou tout entière à l'extérieur du cône doublement tangent. Si λ est compris entre A et A′, la déférente est un hyperboloïde à deux nappes; la cyclide est à l'intérieur du cône. Si λ est compris entre A′ et A″, la déférente est un hyperboloïde à une nappe; la cyclide est à l'extérieur de son cône doublement tangent. Dans ce dernier cas, de tout point de la cyclide, on peut mener des plans tangents réels au cône. Les sections circulaires contenues dans ces plans seront réelles. Il n'en sera pas de même dans les cas précédents. Donc

Les sections circulaires appartenant à un mode de génération ne sont réelles que si la déférente est un hyperboloïde réglé, et alors elles le sont toujours, pourvu que la cyclide soit réelle.

Cette proposition sera confirmée par l'étude géométrique des cyclides.

Voici quelques autres conséquences.

D'abord, par chaque point de la cyclide, on peut faire passer 10 plans tangents doubles, qui sont tangents aux 5 cônes du second degré. Il passe donc 10 cercles réels ou imaginaires par chaque point de la surface. Ainsi, les 10 séries de coniques, qui se trouvent sur toute surface du second ordre à conique double, sont ici formées exclusivement avec des cercles. De plus, comme nous avons vu qu'il y a une ou trois racines de l'équation en λ entre A' et A'', c'est-à-dire que parmi les déférentes il y aura un ou trois hyperboloïdes réglés, il s'ensuit que la cyclide aura une série double ou trois séries doubles de sections circulaires réelles. Nous reviendrons sur ce point.

La détermination des focales est aussi une conséquence des résultats obtenus. Celles des sphères doublement tangentes à la cyclide qui se réduisent à des points ont nécessairement leur centre à l'intersection de la surface déférente et de la sphère directrice qui lui correspond. Donc

Les focales de la cyclide sont les cinq courbes cycliques, intersections de chacune des sphères directrices (S_i) *avec la quadrique déférente* (A_i) *qui lui correspond.*

Ces cinq courbes sont évidemment celles qui ont été examinées dans la *Deuxième Partie* de ce travail; elles constituent les lignes doubles de la développable circonscrite à la cyclide et au cercle de l'infini. Elles sont focales les unes des autres. Si l'on se donne l'une d'elles, les autres se détermineront comme il a été indiqué dans la *Deuxième Partie.*

Si l'on se donne une focale d'une cyclide inconnue, quoique les autres focales puissent être déterminées, la cyclide ne le sera pas. La sphère qui contient la focale est bien la sphère

directrice d'un mode de génération; mais on pourra lui associer comme déférente une quelconque des quadriques qui contiennent la focale. L'équation des cyclides qui admettent pour focales cinq courbes données, focales les unes des autres, contiendra donc nécessairement, et d'une manière rationnelle, un paramètre variable λ.

Un mode de transformation que nous allons étudier nous montrera d'ailleurs, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux principes énoncés dans la *Première* et la *Deuxième Partie*, que les cinq focales sont les lignes doubles de la développable circonscrite à la cyclide et au cercle de l'infini.

44.

Généralités sur les surfaces anallagmatiques.

Nous allons, avant de continuer cette étude, indiquer quelques propriétés générales des surfaces anallagmatiques, que nous appliquerons ensuite aux cyclides.

La définition générale de ces surfaces est la suivante : Elles sont les surfaces enveloppes d'une sphère variable, qui demeure orthogonale à une sphère fixe (S) (la *sphère directrice*), et dont le centre décrit une surface quelconque (B), que nous appellerons la *déférente*.

Soit M un point de la déférente et (P) le plan tangent en ce point. La sphère ayant son centre au point M et orthogonale à (S) touchera son enveloppe en deux points m, m', placés symétriquement par rapport au plan (P). Je dis que la droite mm' va passer au centre O de (S).

En effet, toutes les sphères doublement tangentes, qui ont leurs centres en des points de la déférente voisins de M, pourront être considérées comme ayant leurs centres dans le plan tangent (P), et se coupant aux deux points cherchés m, m'. Toutes ces sphères coupant à angle droit la sphère directrice (S), leur axe radical mm' passera donc par le point O. D'où la règle suivante :

Les points de contact m, m' de chaque sphère de centre M doublement tangente avec l'anallagmatique, sont sur la perpendiculaire abaissée du centre O de la sphère directrice sur le plan tangent à la déférente au point M. On a d'ailleurs

$$Om \cdot Om' = R^2,$$

R étant le rayon de la sphère directrice.

On peut encore définir autrement les points m, m'. Toutes les sphères orthogonales à (S) et ayant leurs centres dans le plan (P) couperont à angle droit toutes les sphères passant par l'intersection de (S) et de (P). En particulier, elles contiendront les deux sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (P). Les centres de ces deux sphères sont donc les points m, m'.

Donc l'anallagmatique peut être considérée comme le lieu des centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de la sphère directrice et des plans tangents à la déférente.

De la remarque précédente, qui a déjà été faite par M. Laguerre, il résulte que les points m, m' ne seront réels que si le plan (P) tangent en M ne rencontre pas la sphère directrice. Par conséquent, si l'on circonscrit à la déférente (B) et à la sphère (S) une développable, la courbe de contact de cette développable et de la déférente découpera celle-ci en régions, pour chacune desquelles le plan tangent coupera toujours ou ne coupera jamais la sphère directrice. Celles des régions de (B) pour lesquelles le plan tangent ne coupe pas la sphère (S) donnent seules des points réels de l'anallagmatique ; elles donnent lieu à une nappe de même connexion que la région d'où elle dérive. Toutefois, pour que cette proposition soit exacte, il faut considérer la région de (B) d'où dérive la nappe de l'anallagmatique comme formée de deux feuillets distincts se réunissant l'un à l'autre sur le contour de cette région. Nous ferons une application de cette remarque dans l'étude de la forme des cyclides.

Une conséquence importante et nouvelle résulte encore de la construction précédente. C'est que *les points de contact m, m' ne dépendent que du plan tangent et nullement du point de contact de ce plan.* Il suit de là que l'étude des anallagmatiques équivaut à la théorie d'un mode de transformation dans lequel à un plan variable on fait correspondre les deux sphères de rayon nul passant par l'intersection de ce plan et d'une sphère directrice fixe. Ainsi, à un plan de la première figure correspondent deux points de la seconde; mais à un point de celle-ci ne correspond qu'un seul plan dans la première.

Comme les géomètres sont plus habitués aux transformations dans lesquelles les points correspondent aux points, on pourra substituer à la figure formée par les plans sa polaire réciproque par rapport à la sphère, et alors on obtiendra une transformation qu'on peut définir ainsi qu'il suit :

Étant donné un point μ, à ce point on fait correspondre les deux points m, m', centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et du plan polaire de μ [par rapport à (S)].

On voit que m et m' ne seront réels que si le point μ est à l'intérieur de la sphère (S). Les points m, m', μ seront en ligne droite avec le centre O de (S), et l'on aura

$$Om \, . \, Om' = R^2 , \quad Om + Om' = \frac{2R^2}{O\mu}$$

Si la sphère (S), tout en ayant son centre O réel, a son rayon de la forme $k\sqrt{-1}$, les points m, m' seront, au contraire, toujours réels, et ils seront de part et d'autre du point O sur la droite $O\mu$. On aura

$$Om \, . \, Om' = -k^2 , \quad Om + Om' = \frac{-2k^2}{O\mu} \, .$$

Dans ce mode de transformation, à une surface (B'), lieu du point μ, correspond une surface anallagmatique (Σ), dont la sphère directrice est (S), et dont la déférente est la polaire (B) de (B') par rapport à (S). Le degré de (Σ) sera généralement

double de celui de (B'), à moins que (B') ne passe au centre de la sphère directrice. Nous allons, du reste, donner les formules qui définissent la transformation.

Prenons pour origine des coordonnées le centre O de la sphère directrice. Soit R le rayon de cette sphère, et désignons par x, y, z les coordonnées du point m. Celles du point m' seront, par conséquent,

$$\frac{R^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Le plan polaire du point μ doit être le lieu des points à égale distance de m et de m'. En écrivant cette propriété, on a pour l'équation de ce plan

$$2Xx + 2Yy + 2Zz = R^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Si donc on appelle x', y', z' les coordonnées du point μ, les formules qui définissent la transformation sont

$$(14)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{2R^2 x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \quad y' = \dfrac{2R^2 y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \\ z' = \dfrac{2R^2 z}{x^2+y^2+z^2+R^2}. \end{cases}$$

Ces formules avaient été indiquées dans un travail de l'auteur (*Annales de l'École Normale*, 1864). En posant

$$(14')\quad \Omega = R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = R^2 \left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right)^2,$$

on en déduit

$$(14'')\quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{R}{R \pm \sqrt{\Omega}}.$$

On voit que, si le point μ (x', y', z') décrit un plan, les points m, m' décriront une sphère, nécessairement orthogonale à la sphère directrice : cela résulte de l'identité

$$(15)\quad \begin{cases} mx' + ny' + pz' + q \\ = \dfrac{2R^2(mx+ny+pz+q) + q(x^2+y^2+z^2-R^2)}{x^2+y^2+z^2+R^2}. \end{cases}$$

La sphère correspondante à un plan (P) sera donc déterminée par la double condition d'être orthogonale à (S) et de passer par l'intersection de (S) et de (P). Elle se réduira à un plan quand le plan (P) passera au centre de (S), à un point-sphère quand le plan (P) sera tangent à (S).

L'identité (15) équivaut à une formule qui permet de transformer les équations des courbes et des surfaces. Soient en effet

P la distance du point μ au plan (P),

T la tangente menée de m à la sphère (T) correspondante au plan (P),

α l'angle sous lequel le plan (P) coupe (S).

L'identité (15) pourra s'écrire

$$(16) \qquad P = \frac{R \cos\alpha \, . \, T^2}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2},$$

et il résulte de cette formule la règle suivante :

Si une surface (B') est définie par une équation *homogène* entre les distances P, P', P'', ... d'un de ses points à plusieurs plans fixes, pour avoir l'équation de l'anallagmatique (Σ) correspondante, il suffit de remplacer P, P', P'', ... par les carrés des tangentes à des sphères orthogonales à la sphère directrice, correspondantes aux plans fixes, ces carrés étant multipliés par des constantes, que la formule (16) apprend à déterminer.

Deux cas particuliers doivent être signalés : 1° si le plan (P) est tangent à la sphère en un point a, P doit être remplacé par le carré de la distance au point a ; 2° si (P) passe par le centre de (S), il se correspond à lui-même, et l'on ne doit pas modifier le facteur P, ou plutôt on doit le multiplier par 2R.

45.

D'un mode de transformation déduit de la théorie des anallagmatiques.

Les formules précédentes (15) et (16) nous montrent qu'en désignant par *première figure* le lieu des points μ et *deuxième*

figure le lieu des points m , m', à un point m de la deuxième figure correspond un seul point μ de la première ; mais que, au contraire, à un point μ correspondent deux points m , m'. Il y a un cas particulier remarquable : c'est celui où le point μ coïncide avec le centre O de la sphère directrice. A ce point O correspondent tous les points à l'infini. C'est ce qui résulte et de la construction et des formules. Car si, dans les équations (14), $x^2 + y^2 + z^2$ devient infini, x', y', z' deviennent nuls.

Ainsi, à un point μ coïncidant avec O correspondent deux points m , m', l'un au point O, l'autre quelconque à l'infini.

A un point μ, situé sur le cône asymptote de la sphère directrice, correspondent deux points, l'un à l'infini sur le cercle et sur la droite $O\mu$, l'autre au milieu de $O\mu$, etc.

A une courbe de degré n de la première figure correspond, dans la seconde, une courbe de degré double $2n$, coupant le cercle de l'infini en $2n$ points. Cependant, si α branches de la courbe passent en O, le degré de la courbe correspondante diminue de α, ainsi que le nombre de points communs avec le cercle de l'infini.

A une surface de la première figure d'ordre n, ayant en O un point multiple d'ordre p, correspond une anallagmatique d'ordre $2n - p$.

Mais le fait essentiel est le suivant :

Si une courbe est tangente en a à la sphère (S), la courbe anallagmatique correspondante a un point double en a.

Si une surface est tangente en a à la sphère (S), la surface anallagmatique correspondante a un point conique en a.

Si une surface est tangente à (S) en tous les points d'une ligne (L), celle-ci est ligne double de l'anallagmatique correspondante.

Faisons quelques applications.

A une droite δ correspond un cercle, situé dans le plan de O et de δ, coupant (S) à angles droits, et passant par l'intersection de (S) et de δ. Si δ devient tangente à (S) en a, le cercle a

son rayon nũl, et se décompose en deux droites se coupant en a, situées dans le plan (O, δ), et allant rencontrer le cercle de l'infini.

A un plan correspond une sphère, qui se réduit, quand le plan devient tangent à (S), au point de contact de ce plan.

A une conique correspond une courbe sphérique du 4e ordre, allant rencontrer le cercle de l'infini en quatre points, c'est-à-dire une cyclique. Cette cyclique acquiert deux points doubles, c'est-à-dire se décompose en deux cercles, si la conique correspondante est doublement tangente à (S).

A une quadrique correspond une cyclide du 3e ou du 4e ordre, suivant que la quadrique passe ou ne passe pas au point O ; etc.

Soient une surface (B') et l'anallagmatique correspondante (Σ). Les focales de (Σ) se déterminent de la manière suivante : Circonscrivons à (B') et à (S) une développable (Δ), et soit (F) la courbe de contact de cette développable (Δ) et de (S). Les plans de (Δ) ont pour correspondants les points-sphères ayant leurs centres sur (F). Donc la surface (Δ') correspondante à (Δ) sera l'enveloppe d'une suite de sphères de rayon nul, et par conséquent sera une développable focale. Ses génératrices correspondront par couples à celles de (Δ) ; elle aura une courbe double de plus que (Δ), la courbe (F).

Appliquons les remarques précédentes à l'étude des cyclides. La cyclide sera l'anallagmatique correspondante à une surface (A') du second degré, et ayant pour déférente la polaire réciproque (A) de (A') par rapport à (S). A la développable |(A')(S)| correspond la développable focale circonscrite à la cyclide. On voit que cette développable aura cinq lignes doubles : 1° la courbe de contact sur (S) de |(A')(S)| ; 2° les quatre courbes cycliques correspondantes aux quatre lignes de striction de la même développable. Les plans de ces quatre lignes étant conjugués, les sphères correspondantes, qui sont orthogonales à (S) seront orthogonales entre elles. Au système de quadriques inscrites dans la développable |(A')(S)| correspondront les cyclides homofocales ; etc.

L'équation de toute surface pouvant être mise sous la forme

$$f(P, P', P'', P''') = 0,$$

f désignant une fonction homogène, l'anallagmatique correspondante aura pour équation

$$f(aS, bS', cS'', dS''') = 0;$$

d'où il suit que *toute équation homogène par rapport aux quatre quantités* S, S′, S″, S‴, *puissances d'un point par rapport à quatre sphères, représente une surface anallagmatique par rapport à la sphère radicale ou orthogonale de ces quatre sphères.*

Par exemple, l'équation d'une cyclide peut se mettre, et d'une infinité de manières, sous les formes

$$SS' = k . S'' S''',$$

$$AS^2 + A'S'^2 + A''S''^2 + A'''S'''^2 = 0,$$

correspondantes à des formes connues de l'équation d'une quadrique.

A des cercles de la seconde figure correspondent dans la première soit des droites, soit des coniques doublement tangentes à (S). Il suit de là qu'une anallagmatique (Σ) ne pourra être engendrée par un cercle que si la surface (B′) correspondante est réglée ou est engendrée par des coniques doublement tangentes à (S).

Par exemple, si (B′) est une quadrique, 1° ses droites donneront une série double de sections circulaires de la cyclide; 2° elle peut aussi être engendrée de quatre manières différentes par des coniques doublement tangentes à (S), et les plans de ces coniques enveloppent l'un des quatre cônes passant par l'intersection de (B′) et de (S). A ces quatre séries de coniques correspondront quatre nouvelles séries doubles de sections circulaires de la cyclide. On aura donc les cinq séries doubles de sections circulaires de la cyclide.

46.

De la forme générale des cyclides, du nombre de leurs focales et de leurs sections circulaires réelles.

Nous pouvons maintenant nous faire une idée assez nette des différentes formes des cyclides. Il suffit de discuter les équations (6), (7), (8), qui déterminent les différents modes de génération de la surface.

D'abord, nous avons vu que l'équation (6) en λ a au moins trois racines réelles. Dans chacun des intervalles des quantités A, A', A'', $+\infty$, il y a une ou trois racines réelles (art. 40).

A toute racine comprise entre A et A' correspond une déférente, qui est un hyperboloïde à deux nappes;

A toute racine comprise entre A' et A'', un hyperboloïde à une nappe;

A toute racine supérieure à A'', un ellipsoïde réel;

A toute racine inférieure à A, un ellipsoïde imaginaire.

Il y a donc, parmi les surfaces déférentes, trois quadriques réelles au moins : un ellipsoïde réel, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes. Je dis, de plus, qu'à la racine unique comprise dans chacun des intervalles de A, A', A'', $+\infty$, ou à la plus petite et à la plus grande des racines, s'il y en a trois dans cet intervalle, correspond toujours une sphère directrice de centre et de rayon réels.

En effet, nous avons vu (art. 40) que le rayon de la sphère directrice est $\sqrt{-L'}$, L' désignant la dérivée de L. Lorsque λ varie dans un des intervalles considérés, la fonction L est d'abord positive. La dérivée L' sera donc négative pour toutes les racines d'ordre impair contenues dans cet intervalle. Donc, s'il y a trois racines, la plus petite et la plus grande donneront un rayon réel. Au contraire, pour la racine moyenne, le carré du rayon sera négatif.

Nous pouvons donc conclure que, dans tous les cas, trois

des cinq modes de génération de la cyclide seront formés avec des quadriques et des sphères réelles.

Si l'équation en λ a ses cinq racines réelles, les deux derniers modes de génération seront formés avec deux surfaces qui pourront être deux ellipsoïdes imaginaires, mais qui seront toujours de même espèce. Des deux sphères correspondantes qui ont leurs centres réels, l'une sera réelle; mais, pour l'autre, le carré du rayon sera négatif.

Les résultats obtenus ici sont d'accord avec ceux de l'article 19, où nous avons examiné le nombre des focales réelles des courbes cycliques.

Si l'équation en λ a deux racines imaginaires, trois seulement des sphères contenant les focales sont réelles. Nous avons vu que, dans ce cas, les trois focales correspondantes sont réelles et se composent d'un seul trait.

Si l'équation en λ a ses cinq racines réelles, quatre des sphères sont réelles; mais deux seulement des focales sont réelles, et se composent chacune de deux traits distincts ([1]).

Dans le cas où l'équation en λ a ses cinq racines réelles, il y a un mode de génération qui caractérise la cyclide : c'est celui qui correspond à la sphère de centre réel, mais de rayon imaginaire. Cela posé, nous pouvons reconnaître la forme générale de la cyclide.

1° L'équation en λ a deux racines imaginaires. Soit un des trois modes de génération formé avec l'ellipsoïde réel (A) et la sphère réelle (S). La développable $\overline{|(S)(A)|}$ est réelle, et se compose d'une seule nappe (de même que la focale se compose d'un seul trait). La courbe de contact de cette développable avec l'ellipsoïde (A) partage cette quadrique en deux régions : l'une d'elles donne tous les points réels de la cyclide (art. 42).

([1]) Les cinq focales ne sauraient être toutes imaginaires, puisque, les équations de l'une d'elles au moins étant réelles, les foyers de cette courbe seront réels. Or l'un de ces foyers est un point d'une autre focale, qui, ayant un point réel, est réelle.

Comme cette région est à connexion simple, on voit que la cyclide sera ici une *surface toujours réelle, formée d'une seule nappe à connexion simple*. Elle aura une seule série double de sections circulaires réelles, puisque une seule des trois déférentes est réglée.

2° L'équation en λ a toutes ses racines réelles. La surface déférente (A), correspondante à la sphère de rayon $k\sqrt{-1}$, est un ellipsoïde imaginaire. La cyclide *est imaginaire*.

3° L'ellipsoïde déférent du même mode de génération est réel. Alors toute droite passant par le centre O de (S) coupe la cyclide en quatre points toujours réels, correspondants aux deux plans tangents de l'ellipsoïde perpendiculaires à cette droite. La cyclide se compose *de deux nappes enveloppant le point* O, *et à l'intérieur l'une de l'autre. Elles sont à connexion simple.*

Trois des surfaces déférentes sont des ellipsoïdes réels, il y a une seule série de sections circulaires réelles.

4° L'équation en λ ayant toujours ses racines réelles, la surface déférente du même mode de génération est un hyperboloïde à deux nappes.

Alors le cône doublement tangent à la cyclide ayant le point O pour sommet est réel, la cyclide est à l'intérieur de ce cône (art. 43). Elle se compose donc de *deux nappes opposées situées à l'intérieur de chacune des deux nappes du cône et à connexion simple*. Trois des déférentes sont des hyperboloïdes à deux nappes, il n'y a encore qu'une seule série double de sections circulaires réelles.

5° La déférente du même mode de génération est un hyperboloïde à une nappe. Le cône doublement tangent à la cyclide est toujours réel, mais la surface est à l'extérieur de ce cône. Elle se compose d'*une seule nappe à connexion triple, semblable à un tore ordinaire*. Il suffit de concevoir que les deux séries de sections circulaires, confondues dans le tore, se dédoublent, par exemple qu'on fasse varier d'une quantité suffisamment petite les coefficients des coordonnées dans l'équation d'un tore rapportée à des axes quelconques.

Dans ce cas trois des déférentes étant des hyperboloïdes réglés, il y a six séries de sections circulaires réelles disposées à peu près comme celles d'un tore, après qu'on aurait dédoublé par une déformation les sections méridiennes et les sections parallèles qui représentent deux séries confondues.

On voit qu'il existe quatre espèces distinctes de cyclides réelles du 4e ordre. Les cyclidés du 3e ordre se déduisant des précédentes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques auront seulement trois formes distinctes.

47.

Du système des cyclides homofocales.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques une cyclide, on obtient une nouvelle cyclide dont les focales sont les transformées des focales de la précédente. En particulier, si l'on prend le pôle de transformation au point de rencontre de trois des sphères directrices (il y a un ou quatre de ces points qui sont réels), trois des focales deviendront planes, les trois sphères directrices se changeront en trois plans rectangulaires, et les sphères doublement tangentes de la cyclique, qui étaient orthogonales à ces sphères directrices, auront leurs centres dans les plans correspondants. La nouvelle cyclide aura trois plans de symétrie. On peut donc affirmer que le système le plus général de cyclides homofocales est le transformé par la méthode des rayons vecteurs réciproques de celui des cyclides homofocales à trois plans de symétrie.

Ces dernières cyclides homofocales ont été étudiées d'une manière détaillée par l'auteur dans un travail présenté comme thèse en 1866 à la Faculté des Sciences de Paris, et qui a été inséré dans les *Annales de l'École Normale* (même année).

Aussi allons-nous examiner de préférence ici le système le plus général de cyclides homofocales, et donner des équations

symétriques représentant les cyclides les plus générales du 3ᵉ et du 4ᵉ ordre.

A cet effet, étant donnée une sphère (S), définie par l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2,$$

nous allons chercher l'équation des quadriques inscrites dans une développable circonscrite à cette sphère; puis, en soumettant ces quadriques à la transformation indiquée (art. 44), nous obtiendrons l'équation générale des cyclides homofocales.

Soient

$$(17)\quad P_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' + d_i R\sqrt{-1} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des quatre faces du tétraèdre conjugué commun à toutes les quadriques et à la sphère (S), et supposons que les coefficients aient été choisis de telle manière que l'on ait identiquement

$$(18)\quad \sum_1^4 P_i^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2.$$

On aura, entre les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i, les relations qui conviennent à toute substitution linéaire orthogonale, et en particulier celles-ci,

$$(19)\quad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 = 1,$$

$$(20)\quad a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j = 0.$$

L'équation

$$(21)\quad \frac{a - a_1}{\lambda - a_1} P_1^2 + \frac{a - a_2}{\lambda - a_2} P_2^2 + \frac{a - a_3}{\lambda - a_3} P_3^2 + \frac{a - a_4}{\lambda - a_4} P_4^2 = 0$$

représentera des quadriques inscrites dans une développable Δ, et d'ailleurs cette développable sera circonscrite à la sphère (S); car il suffit, pour obtenir l'équation de cette sphère, de faire $\lambda = a$ dans l'équation précédente. D'ailleurs, cette équation peut encore s'écrire

$$\sum \frac{a - \lambda}{\lambda - a_i} P_i^2 + \sum P_i^2 = 0.$$

ou, en tenant compte de l'identité (18),

$$(22)\qquad \frac{R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}{\lambda - a} + \frac{P_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{P_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{P_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{P_4^2}{\lambda - a_4} = 0 .$$

Telle est la forme qu'on peut donner à l'équation des quadriques considérées, et il est bon de remarquer que cette équation n'est qu'en apparence du 4e degré en λ. Après qu'on aura chassé les dénominateurs, le coefficient de λ^4 sera nul identiquement, en vertu de l'équation (18).

Cela posé, soumettons nos quadriques au mode de transformation défini par les formules (14) (art. 44), et nous obtiendrons les cyclides homofocales. Voyons ce que devient l'équation (22). On a

$$(23)\qquad P_i = \frac{2R^2 a_i x + 2R^2 b_i y + 2R^2 c_i z + d_i R\sqrt{-1}\,(x^2+y^2+z^2+R^2)}{x^2+y^2+z^2+R^2} .$$

Le plan $P_i = 0$ se transforme donc en une sphère (S_i), orthogonale à la proposée. Appelons R_i le rayon de cette sphère. On aura

$$R_i^2 = -\frac{R^2 a_i^2}{d_i^2} - \frac{R^2 b_i^2}{d_i^2} - \frac{R^2 c_i^2}{d_i^2} - R^2,$$

ou, en vertu des formules (19);

$$R_i^2 = -\frac{R^2}{d_i^2}, \qquad R_i = \frac{R}{d_i\sqrt{-1}}$$

Donc, si nous appelons S_i la puissance d'un point par rapport à la sphère (S_i), on aura

$$(24)\qquad P_i = \frac{R^2 S_i}{R_i\,(x^2+y^2+z^2+R^2)} .$$

Enfin, si l'on tient compte de l'équation (14), on pourra transformer le premier terme de l'équation (22), et l'on aura

$$R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = R^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right) = \frac{R^2 S^2}{(x^2+y^2+z^2+R^2)^2},$$

S désignant la puissance du point (x, y, z) par rapport à la

sphère (S). En réunissant tous ces résultats, l'équation (22) se transformera dans la suivante,

$$\frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\lambda - a} + \frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda - a_1} + \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} = 0.$$

Cette équation représente les cyclides homofocales, et, d'après une remarque déjà faite, elle n'est qu'en apparence du 4e degré. De plus, il suit des formules (20) et (23) que les quatre sphères (S_i), qui sont orthogonales à (S), sont aussi orthogonales entre elles. Donc, si, pour plus de symétrie, au lieu de S nous mettons S_5 dans la formule précédente, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

L'équation

$$\sum_1^5 \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0 \tag{25}$$

où les cinq quantités S_i sont les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales, représente un quelconque des systèmes de cyclides homofocales ayant les cinq sphères (S_i) pour sphères directrices.

Le coefficient de λ^4 étant nul dans l'équation précédente, après qu'on aura chassé les dénominateurs, *il y a entre les cinq puissances S_i d'un point quelconque, par rapport aux cinq sphères orthogonales, la relation identique*

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0. \tag{26}$$

Nous allons étudier successivement les cinq sphères orthogonales et les cyclides homofocales; mais auparavant nous ferons remarquer que, si l'une des cinq sphères se réduisait à un plan, il suffirait de remplacer la quantité $\frac{S_i}{R_i}$ correspondante par le double de la distance au plan qui remplace la sphère. Cela résulte de la formule (23).

48.

Du système de cinq sphères orthogonales.

Soient

$$(27)\quad S_i = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + 2\gamma_i z + \delta_i = 0, \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

les équations de cinq sphères orthogonales. On aura, entre les coefficients $\alpha_i, \ldots, \delta_i$, les relations comprises dans le type suivant :

$$(28)\quad \alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j - \delta_i - \delta_j = 0, \quad (i \gtrless j)$$

qui expriment l'orthogonalité des sphères. Les rayons R_i de ces sphères sont donnés par les formules

$$(29)\quad R_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - \delta_i,$$

et l'on aura les identités

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S_i}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial S_j}{\partial x} + \dfrac{\partial S_i}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial S_j}{\partial y} + \dfrac{\partial S_i}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial S_j}{\partial z} = 2(S_i + S_j), \\ \left(\dfrac{\partial S_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_i}{\partial z}\right)^2 = 4S_i + 4R_i^2. \end{cases}$$

La théorie des sphères orthogonales est d'ailleurs comprise dans l'identité fondamentale déjà obtenue

$$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0.$$

On déduit de cette identité les relations suivantes entre les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$,

$$(31)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{1}{R_i^2} = 0, \quad \sum \dfrac{\alpha_i}{R_i^2} = 0, \quad \sum \dfrac{\alpha_i\beta_i}{R_i^2} = 0, \\ \ldots, \quad \sum \dfrac{\alpha_i\delta_i}{R_i} = 0, \quad \sum \dfrac{\delta_i^2}{R_i^2} = 0. \end{cases}$$

et les suivantes

$$(32) \qquad \sum \frac{\alpha_i^2}{R_i^2} = \sum \frac{\beta_i^2}{R_i^2} = \sum \frac{\gamma_i^2}{R_i^2} = 1, \quad \sum \frac{\delta_i}{R_i^2} = -2.$$

Ces relations nous seront très utiles.

On peut d'ailleurs déduire de l'identité (26),

$$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0,$$

plusieurs propriétés des sphères orthogonales. Par exemple, l'équation

$$S_5 = 0$$

peut s'écrire, en vertu de cette identité,

$$\left(\frac{S_1 - S_5}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{S_2 - S_5}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{S_3 - S_5}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{S_4 - S_5}{R_4}\right)^2 = 0,$$

et la forme nouvelle de l'équation nous montre que la sphère S_5 coupe les quatre autres suivant quatre cercles dont les plans forment un tétraèdre conjugué par rapport à S_5, ce qui est une des plus importantes propriétés des sphères orthogonales.

De même, l'équation

$$\left(\frac{S_5}{R_5}\right)^2 + \left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2 = 0,$$

qui se décompose en deux facteurs, représente deux points-sphères, ayant pour centres les points d'intersection des trois autres sphères, etc.

Rappelons qu'il y a deux systèmes remarquables de sphères orthogonales, l'un pour lequel deux sphères ont leurs centres et leurs rayons imaginaires conjugués, l'autre pour lequel les cinq centres sont réels, l'une des sphères ayant le carré de son rayon négatif.

Enfin, de l'identité fondamentale on déduit encore que, dès que l'on connaîtra un système de sphères orthogonales, on aura tous les autres en soumettant à une substitution linéaire orthogonale les cinq quantités $\frac{S_i}{R_i}$.

Or on peut prendre pour ces quantités

$$2x,\ 2y,\ 2z,\ \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R\sqrt{-1}},\ \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R},$$

où R^2 peut être de l'une des deux formes

$$K,\quad K\sqrt{-1},$$

et, en soumettant ces cinq quantités à la substitution indiquée, on aura l'équation la plus générale d'un système de cinq sphères orthogonales.

49.

Des cyclides homofocales.

Nous allons maintenant démontrer que le système des cyclides homofocales, dont l'équation a déjà été donnée, est un système triple orthogonal, c'est-à-dire que, par chaque point de l'espace, il passe trois cyclides du système, se coupant à angle droit. Pour cela, nous nous proposerons d'abord la question suivante :

Étant données deux équations homogènes par rapport aux cinq quantités S_i,

$$\varphi(S_1, S_2, \ldots, S_5) = 0, \quad \psi(S_1, S_2, \ldots, S_5) = 0,$$

exprimer qu'elles représentent deux surfaces orthogonales.

Appelons (a, b) l'expression

$$\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot \frac{\partial b}{\partial z}.$$

On aura évidemment

$$(\varphi, \psi) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \frac{\partial \Psi}{\partial S_j} (S_i, S_j),$$

équation où il faut donner à i et à j toutes les valeurs 1, 2, 3,

4, 5. Mais, d'après les identités (30), l'équation précédente pourra être écrite ainsi,

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} (\varphi, \psi) = {} & 2\left(\sum S_i \frac{\partial \varphi}{\partial S_i}\right)\left(\sum \frac{\partial \psi}{\partial S_i}\right) \\ & + 2\left(\sum S_i \frac{\partial \psi}{\partial S_i}\right)\left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial S_i}\right) + 4\sum R_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial S_i}\frac{\partial \psi}{\partial S_i}. \end{aligned} \right.$$

Comme les deux premiers termes du second membre sont nuls, en vertu de l'équation homogène des deux surfaces, on voit que la relation d'orthogonalité prend la forme simple

$$\sum R_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial S_i} = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{S_i}{R_i}\right)} \frac{\partial \psi}{\partial \left(\frac{S_i}{R_i}\right)} = 0.$$

Cette relation est exactement semblable à celle qu'on obtient avec les coordonnées ordinaires; il y a seulement deux variables de plus.

L'équation précédente sera évidemment vérifiée, si l'on prend deux cyclides appartenant au système défini par l'équation

$$(34)\quad \sum_1^5 \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Deux cyclides homofocales se coupent donc à angle droit en tous les points de leur courbe d'intersection.

Il reste à démontrer qu'il en passe toujours trois qui sont réelles, par un point quelconque de l'espace.

Supposons d'abord que, des cinq sphères (S_i), une seule ait son rayon imaginaire. Les cinq quantités S_i seront réelles; mais, parmi les cinq quantités R_i, une, R_5 par exemple, sera de la forme $+ K\sqrt{-1}$. Alors l'équation du système sera

$$\frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda - a_1} + \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} - \frac{\left(\frac{S_5}{K_5}\right)^2}{\lambda - a_5} = 0.$$

Quand on y considère λ comme l'inconnue, elle donne trois racines réelles, l'une entre a_1 et a_2, les deux autres entre a_2 et a_3, a_3 et a_4.

Ajoutons que les cyclides correspondantes à ces trois racines sont réelles, et *toujours des trois formes distinctes signalées à l'art.* 46 *pour le cas où l'équation a ses cinq racines réelles.*

On verrait, de même, si deux des sphères orthogonales étaient imaginaires conjuguées, qu'il passe toujours trois cyclides réelles par un point quelconque de l'espace.

Nous avons reconnu (art. 45) que toute équation homogène

$$\varphi(S_1, S_2, S_3, S_4) = 0$$

représente une surface anallagmatique par rapport à la sphère orthogonale aux quatre sphères (S_1), (S_2), (S_3), (S_4). Comme de l'équation (34) on peut éliminer, au moyen de l'identité (26) qui relie les cinq quantités S_i^2, une quelconque de ces quantités, on reconnaît immédiatement que la cyclide sera anallagmatique par rapport aux cinq sphères (S_i). La même conclusion s'appliquerait à toute équation homogène

$$\varphi(S_1^2, \ldots, S_5^2) = 0,$$

qui représente, quelle que soit la forme de la fonction φ, *une surface anallagmatique par rapport aux cinq sphères* (S_i).

Revenons aux cyclides. Quand on fait, dans l'équation (34), $\lambda = a_i$, la surface se réduit à une sphère double (S_i), ou plutôt à la portion de cette sphère, limitée par la focale. Quand λ s'approche de a_1, par exemple, l'intersection de la cyclide et de la sphère (S_i) s'approche de la courbe limite

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} & S_1 = 0, \\ & \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{a_1 - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{a_1 - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{a_1 - a_4} + \frac{\left(\frac{S_5}{R_5}\right)^2}{a_1 - a_5} = 0. \end{aligned} \right.$$

On aurait de même les cinq autres focales.

50.

Du système de coordonnées curvilignes formé avec les cyclides homofocales et orthogonales.

Il résulte, des remarques précédentes et du théorème de M. Dupin, que les lignes de courbure d'une cyclide quelconque sont algébriques et se trouvent à l'intersection de cette surface avec les cyclides homofocales. On saura donc déterminer les lignes de courbure des cyclides les plus générales.

Parmi les cyclides du système orthogonal (34), il y en a trois qui sont seulement du 3e degré. En effet, dans l'équation (34), le coefficient de $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ est

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda - a_i)}.$$

Il sera nul pour les trois valeurs de λ satisfaisant à l'équation

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda - a_i)} = 0.$$

On saura donc déterminer les lignes de courbure des cyclides du 3e ordre.

Le système des cyclides homofocales donne naissance à un système de coordonnées curvilignes, analogue à celui des coordonnées elliptiques, dont Lamé, Jacobi, Liouville ont fait un si heureux emploi. On sait que Lamé a démontré le premier que le système des coordonnées elliptiques est le seul qui se compose de trois séries de systèmes isothermes. Le système que nous allons étudier ne possède donc pas cette propriété ; mais il se rapproche par toutes les autres du système des coordonnées elliptiques.

Appelons ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des trois cyclides homofocales passant en un point de l'espace. Ces paramètres seront des racines de l'équation

$$\sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Si, après avoir chassé les dénominateurs, on appelle M le coefficient de λ^3 dans l'équation précédente, on aura l'identité

$$(36)\qquad \sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = \frac{M(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)}{(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)(\lambda-a_4)(\lambda-a_5)}.$$

Posons, pour abréger,

$$(37)\qquad f(\lambda)=(\lambda-a_1)\ldots(\lambda-a_5).$$

Si nous décomposons le second membre en fractions rationnelles, et que nous égalions les coefficients des termes semblables dans les deux membres, nous obtiendrons

$$(38)\qquad \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = \frac{M(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}.$$

Posons encore,

$$(39)\qquad H_i = \sqrt{\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}}$$

et l'équation (38) pourra s'écrire

$$(40)\qquad \frac{S_i}{R_i} = \sqrt{M}\,.\,H_i.$$

Ces équations donnent bien les quantités S_i, ou plutôt leurs rapports; mais il faut en déduire les coordonnées ordinaires x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2.

A cet effet, nous remarquerons que les formules (31), (32) conduisent aux suivantes,

$$(41)\qquad \begin{cases} \sum \frac{\alpha_i S_i}{R_i^2} = x, \quad \sum \frac{\beta_i S_i}{R_i^2} = y, \quad \sum \frac{\gamma_i S_i}{R_i^2} = z, \\ -2 = \sum \frac{S_i}{R_i^2}, \quad -2(x^2+y^2+z^2) = \sum \frac{\delta_i S_i}{R_i^2}, \end{cases}$$

qui donneront x, y, z, quand les rapports des quantités S_i seront connus.

On en déduit ici

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{\alpha_i H_i}{R_i}, \\ y &= \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{\beta_i H_i}{R_i}, \\ z &= \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{\gamma_i H_i}{R_i}, \\ -2 &= \sqrt{M}\sum_1^5 \frac{H_i}{R_i}. \end{aligned}\right.$$

La dernière de ces équations fera connaître $\sqrt{M}$, et les autres détermineront ensuite x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2.

Notons aussi la formule

$$(43)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{\sqrt{M}}{2}\sum_1^5 \frac{\delta_i H_i}{R_i},$$

qui donne le carré de la distance à l'origine des coordonnées, et qu'on déduit de la dernière des équations (41).

Après avoir trouvé les expressions des quantités S_i et des coordonnées ordinaires x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, nous allons donner la formule relative à la distance de deux points infiniment voisins.

Cette formule, calculée par les procédés connus, est la suivante,

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{4ds^2}{-M} = \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}d\rho_1^2 \\ + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}d\rho_2^2. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'elle ne diffère de l'équation analogue relative aux coordonnées elliptiques que par le degré de la fonction $f(\lambda)$ et

par la présence du facteur M, dont nous avons déjà donné la valeur. Les formules principales étant établies, nous pouvons passer aux applications.

51.

Applications aux cyclides homofocales.

Les surfaces composant le système s'obtiennent en donnant à l'un des paramètres une valeur constante. Les cinq valeurs remarquables $\rho = a_i$ donneront les cinq sphères orthogonales. Pour $\rho = a_i$, S_i étant nul, d'après les formules (40), on obtiendra tous les points de la sphère (S_i).

Donnons à ρ_1, par exemple, une valeur constante α, nous obtiendrons une cyclide quelconque, et la formule (44) deviendra

$$(45) \qquad \frac{4ds^2}{-M} = (\rho - \rho_1)\left[\frac{d\rho^2(\rho - \alpha)}{f(\rho)} + \frac{d\rho_1^2(\alpha - \rho_1)}{f(\rho_1)}\right].$$

La forme même de cette expression de ds^2 nous apprend que *les cyclides peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure*. En d'autres termes, les lignes de courbure forment un système de lignes isothermes orthogonales [1].

Il suit encore de la forme de l'équation précédente qu'on saura déterminer les lignes de longueur nulle tracées sur la cyclide. Leur équation est

$$(46) \qquad \int\sqrt{\frac{\rho - \alpha}{f(\rho)}}\,d\rho \pm \sqrt{-1}\int\sqrt{\frac{\alpha - \rho_1}{f(\rho_1)}}\,d\rho_1 = \text{const.}$$

---

[1] M. O. Bonnet a proposé d'appeler tous les systèmes de lignes jouissant de cette propriété des systèmes *isométriques*. Il me paraît préférable de leur conserver le nom de lignes *isothermes*. J'ai démontré, dans le cours que j'ai eu l'honneur de faire en 1866 comme suppléant de M. Bertrand au Collége de France, que, si l'on étudie la distribution de la chaleur en tous les points d'une surface infiniment mince, supposée partout de même épaisseur, les systèmes de lignes précédents sont effectivement des systèmes isothermes.

La développable focale, enveloppe du système, est le lieu des points de l'espace pour lesquels deux des trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 deviennent égaux. Faisons, par exemple,

$$\rho_1 = \rho_2 .$$

La formule (44) nous donnera, pour tous les points de la développable focale,

$$ds^2 = -\frac{M}{4}\frac{(\rho-\rho_1)^2}{f(\rho)}d\rho^2 . \tag{47}$$

La forme de ds^2 est bien celle qui a été indiquée dans la *Première Partie* (art. 5).

Cette développable coupe chaque cyclide du système suivant 16 droites et la touche suivant une ligne de courbure exceptionnelle. En effet, considérons la cyclide $\rho_2 = \alpha$. Elle aura avec la développable enveloppe deux séries distinctes de points communs : 1° ceux qu'on obtiendra en faisant $\rho = \rho_1$; 2° ceux qui correspondent à la valeur de ρ (ou de ρ_1)

$$\rho = \alpha .$$

Ces derniers points sont évidemment sur la courbe limite, ligne de courbure singulière, intersection de la cyclide avec la surface infiniment voisine du système. Quant aux premiers points, je dis qu'ils sont sur 16 droites.

En effet faisons $\rho = \rho_1$, $\rho_2 = \alpha$ dans les formules qui donnent H_i ; on aura

$$H_i = \frac{\pm(a_i - \rho)\sqrt{a_i - \alpha}}{\sqrt{f'(\alpha)}} .$$

Les cinq quantités H_i deviendront, par conséquent, des fonctions linéaires de ρ, et, par suite, on obtiendra, pour les coordonnées ordinaires x, y, z, des valeurs de la forme

$$x = \frac{\alpha + \beta\rho}{\alpha' + \beta'\rho}, \text{ etc.}$$

Lorsque ρ variera dans ces formules, elles donneront tous les points d'une ligne droite. *Il y aura* 16 *droites correspon-*

dantes aux différentes combinaisons des signes des radicaux H_i. Ces 16 droites sont évidemment les enveloppes des lignes de courbure.

Cependant, si α était égale à une des quantités a_i, la cyclide se réduirait à la sphère (S_i) ; un des radicaux H_i serait nul, et on ne trouverait plus que 8 droites. Ces 8 droites sont les enveloppes des courbes cycliques homofocales suivant lesquelles la sphère (S_i) est coupée par les surfaces du système.

La développable focale coupe donc la sphère (S_i) : 1° suivant le cercle de l'infini, qui est une ligne octuple de la développable ; 2° suivant 8 droites ; 3° suivant la focale située sur (S_i), qui est une des courbes doubles de la développable.

Enfin, l'arête de rebroussement de la développable focale est le lieu des points de l'espace pour lesquels les trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 prennent une même valeur ρ. On aura donc, pour tous les points de cette courbe,

$$\left[\frac{S_i}{R_i}\sqrt{f'(a_i)}\right]^{\frac{2}{3}} = M^{\frac{1}{3}}(a_i - \rho) ;$$

et si entre les cinq équations que comprend cette formule, on élimine

$$M^{\frac{1}{3}}, \quad \rho M^{\frac{1}{3}},$$

on trouvera trois équations de la forme

$$\sum k_i \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^{\frac{2}{3}} = 0 , \tag{48}$$

et convenant à tous les points de l'arête de rebroussement. Nous voyons d'ailleurs, d'après la formule qui donne ds^2, que l'arc élémentaire de cette courbe est nul, ce qui est conforme aux résultats de la *Première Partie* (art. 5).

On pourrait déduire des calculs précédents les équations de la développée sphérique d'une cyclique. En effet, on a vu (art. 5) que le cône ayant pour sommet le centre d'une

sphère (S) et pour base la courbe de rebroussement (R) d'une développable focale (F) coupe la sphère (S) suivant la développée sphérique de l'intersection de (F) et de (S). En appliquant ce résultat à chacune des sphères directrices, on aura les développées sphériques des cinq focales.

Bien que les calculs soient des plus simples, nous nous dispenserons de les développer.

52.

Application des formules relatives aux cyclides à la surface générale du 3e ordre, et à la surface du 4e ordre à conique double.

Les formules (42), où x, y, z représentent les coordonnées ordinaires d'un point, peuvent être rendues plus symétriques par l'introduction des coordonnées homogènes. Posons

$$x=\frac{X}{T},\quad y=\frac{Y}{T},\quad z=\frac{Z}{T},\quad T=\frac{1}{\sqrt{M}};$$

elles deviendront

$$X=\sum_1^5 \frac{\alpha_i H_i}{R_i},$$

$$Y=\sum_1^5 \frac{\beta_i H_i}{R_i},$$

$$Z=\sum_1^5 \frac{\gamma_i H_i}{R_i},$$

$$T=-\frac{1}{2}\sum_1^5 \frac{H_i}{R_i}.$$

Si l'on donne à ρ_2 une valeur quelconque, on obtient des formules du type suivant,

$$(49)\quad \begin{cases} X = \sum_1^5 A_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}, \\ Y = \sum_1^5 B_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}, \\ Z = \sum_1^5 C_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}, \\ T = \sum_1^5 D_i \sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}, \end{cases}$$

qui donnent les coordonnées homogènes d'un point de la cyclide en fonction de deux paramètres ρ, ρ_1. Les coefficients A_i, B_i, C_i, D_i ne sont pas quelconques, et sont liés par de nombreuses relations. Mais, si l'on effectue sur la cyclide la transformation homographique la plus générale, les formules précédentes conserveront leur forme, et il n'y aura plus aucune relation à établir entre les constantes qui y figurent. Donc

Les formules (49) *déterminent en fonction de deux paramètres les coordonnées homogènes d'un point quelconque d'une surface générale du 3e ordre ou d'une surface du 4e ordre à conique double.*

Bien que l'homographie introduise 16 constantes, et que les formules primitives en contiennent plus de 4, il peut paraître douteux que les formules (49) ne conviennent pas à une surface plus générale que la surface du 4e ordre à conique double. La démonstration directe suivante lève toutes les difficultés.

Désignons par X_i le radical $\sqrt{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}$. Les cinq radicaux ainsi obtenus satisfont évidemment à deux équations de la forme

$$(50)\qquad \sum_1^5 A_i X_i^2 = 0, \quad \sum_1^5 B_i X_i^2 = 0.$$

Cela posé, introduisons une inconnue auxiliaire λ, de la forme

$$\lambda = \Sigma E_i X_i .$$

De cette dernière équation et des formules (49) on déduira, pour les quantités X_i, des expressions de la forme

$$X_i = P_i + m_i \lambda , \tag{51}$$

où P_i désigne une fonction linéaire de X , Y , Z , T, et m_i une constante. En portant ces valeurs dans les identités (50), on obtiendra deux équations de la forme

$$u_2 + u_1 \lambda + \lambda^2 = 0 , \qquad v_2 + v_1 \lambda + \lambda_2 = 0 \tag{52}$$

où u_2, v_2, u_1, v_1 sont des fonctions homogènes du second et du premier degré en X , Y , Z , T. Il reste à éliminer λ entre ces deux équations, ce qui conduit évidemment à l'équation d'une surface du 4e ordre à conique double (1).

Revenons aux formules (49). A cause des doubles signes des radicaux, à chaque système de valeurs de ρ, ρ_1 correspondent 16 points de la surface dans le cas de la cyclide. Ces 16 points forment un polyèdre anallagmatique par rapport aux cinq sphères directrices.

Pour faire disparaître l'ambiguité provenant de ces doubles signes, on peut adopter le moyen suivant.

Introduisons, au lieu de ρ, ρ_1, les variables définies par les équations

$$\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{\rho_1\, d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = du_1 , \quad \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = du ;$$

ρ et ρ_1 seront des fonctions ultraelliptiques de u, u_1, et l'on reconnaît dans chacun des radicaux qui figurent dans les formules (49) les fonctions *Al* de M. Weierstrass. Ces fonc-

(1) Un mode semblable de démonstration, appliqué au cas où les formules contiennent n radicaux au lieu de 5, montrerait que la surface correspondante est, en général, de l'ordre 2^{n-3}.

tions sont uniformes et remplacent les sin *am*, cos *am*, Δam de la théorie des fonctions elliptiques. Nous allons d'abord montrer l'analogie des formules précédentes avec celles qui ont été trouvées pour les courbes du 3ᵉ ordre par M. Aronhold, et qui ont permis à M. Clebsch d'établir un lien entre la théorie des fonctions elliptiques et celle des courbes du 3ᵉ ordre.

En effet, il résulte de tout ce qui précède que, si dans les formules (49) on donne à ρ_1 une valeur annulant un des radicaux, a_5 par exemple, les formules qu'on obtient conviennent à la transformée homographique d'une cyclique, c'est-à-dire soit à une courbe plane générale du 4ᵉ degré à deux points doubles ou du 3ᵉ degré, soit à l'intersection de deux quadriques. Or ces formules sont de la forme

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \sum_1^4 A_i \sqrt{a_i - \rho}, \\ Y &= \sum_1^4 B_i \sqrt{a_i - \rho}, \\ Z &= \sum_1^4 C_i \sqrt{a_i - \rho}, \\ T &= \sum_1^4 D_i \sqrt{a_i - \rho}. \end{aligned} \right.$$

On peut évidemment, par une substitution de la forme

$$\frac{a_2 - \rho}{a_1 - \rho} = K\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2, \qquad \frac{a_3 - \rho}{a_1 - \rho} = K'\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2,$$

rendre rationnels trois des radicaux, et ramener les formules (53) à la forme

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= A + B\lambda + C\lambda^2 + D\sqrt{\Delta}, \\ Y &= A' + B'\lambda + C'\lambda^2 + D'\sqrt{\Delta}, \\ Z &= A'' + B''\lambda + C''\lambda^2 + D''\sqrt{\Delta}, \\ T &= A''' + B'''\lambda + C'''\lambda^2 + D'''\sqrt{\Delta}, \end{aligned} \right.$$

où Δ désigne un polynome du 4e degré en λ, et qui a été employée par MM. Aronhold et Clebsch [1].

Les formules (53) et (54) sont évidemment équivalentes; mais, sous leur première forme, ces équations ont une analogie manifeste avec celles que nous avons données pour les cyclides, et que nous avons étendues, notamment à toute surface du 3e ordre. On doit donc penser qu'il y a entre la théorie des fonctions ultraelliptiques et celle des surfaces du 3e ordre un lien tout à fait semblable à celui qui existe entre les courbes du 3e degré et les fonctions elliptiques. Dans un autre travail, l'auteur se propose de développer quelques résultats qu'il a obtenus dans l'étude de ces relations.

Enfin nous remarquerons aussi que les formules (49) mettent en évidence 16 droites de la surface. Si l'on y fait $\rho = \rho_1$, les radicaux deviennent des carrés parfaits, et les coordonnées deviennent des fonctions linéaires de ρ, qui peuvent prendre 16 formes différentes, par suite des doubles signes des radicaux. Nous démontrerons d'ailleurs que les cyclides du 4e ordre n'ont pas plus de 16 droites.

---

[1] *Clebsch*: Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. *Journal de Borchardt*, t. LXIII, p. 94.

CINQUIÈME PARTIE.

Étude géométrique des cyclides

53.

Des focales singulières et des sections circulaires.

Nous nous proposons d'étudier ici, en tenant compte pour plus de rapidité de quelques résultats déjà établis, les propriétés géométriques des cyclides. Nous démontrerons les propositions dues à MM. Moutard, Laguerre, de la Gournerie, et nous ajouterons quelques propriétés qui nous paraissent nouvelles.

Nous avons vu que la cyclide peut être considérée comme l'enveloppe des sphères, ayant leur centre sur une quadrique (A) et coupant à angle droit une sphère (S). Pour avoir les points de contact de l'une des sphères variables, de centre M, avec la cyclide, il faut (art. 42) abaisser du centre de (S) une perpendiculaire sur le plan tangent en M à (A). Cette droite coupe la sphère, de centre M, en deux points m, m', qui sont les deux points de la cyclide correspondants au point M. Les droites mM, m'M sont donc les normales de la cyclide en m, m'.

Cette définition des cyclides donne immédiatement leurs focales ordinaires, mais elle fait connaître aussi, comme l'ont montré MM. Laguerre et de la Gournerie, les focales singulières de la cyclide.

Soit en effet m un point de la cyclide situé sur le cercle de l'infini, et soit M le point de la déférente (A) auquel il corres-

pond. Le plan tangent à (A) en M doit être perpendiculaire à Om ; il contiendra donc la tangente en m au cercle de l'infini.

D'ailleurs, ce plan, tangent en M à la déférente, sera aussi tangent en m à la cyclide, puisqu'il est perpendiculaire à la droite Mm, qui doit être normale en m à la cyclide. On a donc le résultat suivant :

Les plans tangents à la cyclide en tous les points du cercle de l'infini sont aussi tangents à la déférente. En d'autres termes, *les focales singulières de la cyclide sont les focales ordinaires de la déférente.* Cela explique pourquoi, dans les cinq modes de génération, les cinq déférentes ont les mêmes focales. La proposition précédente s'étend d'ailleurs à toutes les anallagmatiques.

On peut rendre compte aussi d'une manière très simple, comme l'a fait M. Moutard, de l'existence des sections circulaires. En effet, toutes les sphères orthogonales à (S) et ayant leurs centres sur une même génératrice rectiligne de (A) contiendront toutes un même cercle, appartenant à la cyclide. Ce cercle est dans un plan mené par le pôle O perpendiculairement à la génératrice rectiligne, et, comme il y a une deuxième génératrice perpendiculaire à ce plan, il coupera la cyclide suivant deux cercles. L'enveloppe de tous les plans tangents doubles d'une même série est un cône supplémentaire du cône asymptote de la surface (A).

34.

Des relations entre les cinq modes de génération des cyclides.

Proposons-nous le problème suivant : Étant donné un des modes de génération, c'est-à-dire une surface (A) et la sphère (S) correspondante, déterminer les autres surfaces déférentes et les sphères directrices qui leur sont associées.

Nous remarquerons d'abord que, si l'on construit la développable $\lfloor (A)(S) \rfloor$, la courbe de contact de cette développable et de la sphère appartient évidemment à la cyclide, et celle-ci

coupe normalement la sphère en tous les points de cette courbe. La développable précédente a pour lignes de striction quatre coniques (K_1), (K_2), (K_3), (K_4), qui sont dans les faces du tétraèdre conjugué commun à (A) et à (S).

Soit (K_i) l'une de ces coniques, et a un de ses points. Deux génératrices de la développable viennent passer en a, savoir, at, at', tangentes en t et t' à la sphère (S). La sphère de centre a et de rayon $at = at'$ sera donc normale en t, t' à la sphère (S), et tangente à la cyclide en ces deux points.

Il suit de là que toutes les sphères décrites des différents points de (K_i) comme centres et orthogonales à (S) seront des sphères doublement tangentes à la cyclide, et, comme elles forment une suite continue, elles feront partie d'une des séries inconnues de sphères doublement tangentes. Donc, il y aura quatre surfaces (A_i) homofocales à (A) et contenant chacune une des coniques de striction (K_i) de la développable $\overline{|(A)\,(S)|}$. *Ces quatre surfaces sont les déférentes cherchées.*

Il reste à déterminer la sphère directrice correspondante à chaque surface. Or, les sphères, ayant leur centre sur la conique (K_i), et coupant (S) à angle droit, coupent aussi à angle droit la sphère (S_i), décrite du pôle de ce plan comme centre et orthogonale à (S).

Cette sphère est la seule qui soit en même temps orthogonale à (S) et aux sphères ayant leur centre sur (K_i). C'est donc la sphère directrice. Ainsi

Les quatre sphères directrices (S_i) *ont pour centres les sommets du tétraèdre conjugué aux deux surfaces* (A), (S). *La sphère correspondante à la conique* (K_i) *a son centre au pôle du plan de* (K_i).

On peut encore déterminer les sphères de la manière suivante :

Soit (A_i) la surface passant par (K_i), et (S_i) la sphère correspondante. Le plan radical de (S) et de (S_i) est le plan de la conique (K_i). On voit que ce plan coupe (A_i) suivant une conique (K_i), telle que les trois surfaces

$$(K_i)\,,\ (A)\,,\ (S)$$

soient inscrites dans une même développable. De même, eu égard à la symétrie des deux modes de génération, il coupera (A) suivant une conique (H), telle que les trois surfaces

$$(H), (A_i), (S_i)$$

soient inscrites dans une même développable.

Il suit de là qu'il y aura une sphère inscrite dans la développable $\boxed{(H)(A_i)}$, et cette sphère sera (S_i), qu'il s'agissait de déterminer.

Ces belles relations sont dues à M. Laguerre [1], qui les a données sans démonstration.

55.

Classification des cyclides.

La classification des cyclides s'effectue sans difficulté, d'après la nature des focales ordinaires et singulières.

1° Si la surface déférente est une sphère, on a la surface de révolution engendrée par les ovales de Descartes tournant autour de leur axe focal. Le cercle de l'infini est cercle de rebroussement.

2° Si la surface déférente est dépourvue de centre, une des focales singulières est rejetée à l'infini. Nous verrons que, dans ce cas, la cyclide est du 3e degré.

3° Si la déférente est de révolution, la focale ordinaire est doublement tangente au cercle de l'infini. Nous l'avons appelée cartésienne; nous conserverons le même nom à la cyclide.

4° Si la déférente est tangente à la sphère directrice, ou si cette sphère se réduit à un point (nous verrons que ces deux cas se confondent), la focale ordinaire a un point double, qui

---

(1) Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques. *Bulletin de la Société Philomathique*, 1868.

est un point conique de la cyclique. Celle-ci est une podaire ou réciproque de cette quadrique.

5° Si la déférente est doublement tangente à la sphère, la cyclide est, en général, la réciproque d'un cône et a deux points doubles.

6° Si le cône du second degré est de révolution, la cyclide réciproque a généralement quatre points doubles. C'est la cyclide à lignes de courbure circulaires de M. Dupin.

Telles sont les divisions principales. Les trois premières sont établies d'après la nature des focales singulières, les dernières d'après celle des focales ordinaires. Nous allons rapidement passer en revue ces différentes classes.

Quand la déférente (A) est une sphère, la cyclide est de révolution; elle est engendrée par les ovales de Descartes tournant autour de leur axe focal. Tout plan la coupe suivant des ovales de Descartes, toute sphère suivant une cartésienne.

Les sphères inscrites dans la surface couperont toute sphère sécante suivant des cercles doublement tangents à la section [1].

56.

De la cyclide du 3e degré.

Si la surface du second degré est dépourvue de centre, les résultats que nous avons établis subissent quelques modifications, que nous allons étudier. D'abord, la cyclide est seulement du 3e degré.

En effet, prenons une des deux séries de plans parallèles coupant la déférente suivant une seule droite. A chacune de ces droites correspond un cercle situé dans un plan perpendi-

[1] On pourra consulter un article de l'auteur (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864), où se trouvent quelques théorèmes relatifs à cette surface.

culaire à la droite, et les plans de tous ces cercles se coupent suivant une droite δ, perpendiculaire à la série de plans parallèles coupant la déférente suivant une seule génératrice. La droite δ, contenant une infinité de points de la cyclide, fera partie de la surface. La cyclide passe donc par le pôle, et contient deux droites δ, δ', perpendiculaires aux plans directeurs de la déférente. Le plan de ces deux droites coupe la cyclide suivant une troisième droite rejetée à l'infini, et tous les plans passant par l'une ou l'autre des droites δ, δ' coupent la surface suivant un cercle. La cyclide est donc du 3e degré, et nous pouvons énoncer, sans insister davantage, les propositions suivantes :

Quand la cyclide est du 3e degré, elle contient une droite dans le plan de l'infini, on mène les cinq plans tangents triples qui passent par cette droite; les points de contact de ces plans tangents sont les cinq pôles de la surface. En chacun de ces pôles se croisent deux droites de la surface, en tout 10 droites, par lesquelles passent tous les plans coupant la cyclide suivant des cercles.

La cyclide contiendra en outre une série de sections coniques situées dans des plans parallèles, qui contiennent la droite à l'infini sur la surface.

On sait que toute surface du 3e degré a 27 droites. Nous trouvons les 16 qui nous manquent, et qui appartiennent à toute cyclide, même du 4e ordre.

57.

Des podaires ou réciproques de quadriques.

Considérons maintenant le cas où la déférente (A) est tangente à la sphère (S). Le tétraèdre conjugué commun a deux sommets réunis au point de contact des deux surfaces. Les deux sphères directrices correspondantes se réduisent à un point; leur centre commun est le point de contact de (A) et de (S). Ainsi, *une des sphères directrices se réduit à un point* O.

Soit (A_1) la déférente associée à ce point-sphère. La cyclide sera l'enveloppe des sphères ayant leur centre sur (A_1) et passant par le point O. Elle sera donc le lieu des symétriques du point O par rapport aux plans tangents de (A_1). Le lieu ainsi formé est évidemment homothétique à la podaire de (A_1) par rapport au point O. Donc

La cyclide est une podaire de quadrique.

On sait d'ailleurs que les podaires de quadriques sont aussi les transformées par rayons vecteurs réciproques d'autres quadriques.

Appliquons notre règle générale pour obtenir les différents modes de génération.

Les quatre lignes doubles de la développable $\overline{|(A_1)\,(S)|}$ deviennent ici : 1° la courbe de contact du cône circonscrit à (A_1) et de sommet O ; 2° les trois couples de focales de ce cône. Les cinq modes de génération seront formés :

1°, 2° Avec (A_1) et le point-sphère O, ce mode comptant pour 2 ;

3°, 4°, 5° Avec chacune des trois surfaces homofocales à (A_1) passant par O ; les sphères directrices seront tangentes en O à la déférente qui leur est associée, et auront leur centre dans le plan polaire de O par rapport à (A_1).

Analytiquement le cas actuel correspond à une racine double de l'équation en λ de l'article 43.

Si la quadrique (A) se réduit à une conique infiniment aplatie, située dans un plan (P), alors les sphères ayant leurs centres sur cette conique passeront par deux points fixes symétriques par rapport au plan de la conique, et seront tangentes à la cyclide en tous les points d'un cercle. L'hypothèse que nous examinons est évidemment la seule dans laquelle les sphères soient inscrites à la cyclide suivant un cercle. Car le lieu des centres d'une telle suite de sphères doit être une courbe, et par conséquent une conique. Et d'ailleurs, si elles coupent à angle droit une sphère quelconque (S), elles coupent aussi à angle droit toutes les sphères passant par l'intersection

de (S) et du plan des centres, c'est-à-dire qu'elles contiennent toujours deux points réels ou imaginaires. Ces deux points sont des points coniques de la cyclide. En transformant la cyclide par rayons vecteurs réciproques et mettant le pôle en un de ces deux points, on aura une quadrique à point double, c'est-à-dire un cône général du second degré. Donc

Les cyclides à deux points doubles sont les réciproques des cônes du second degré.

Remarquons toutefois que la transformation par laquelle on déduit le cône de la cyclide n'est pas nécessairement réelle.

Soit (A) la conique déférente, O le point commun à toutes les sphères, et O_1 le symétrique de O par rapport au plan de (A). Les trois nouvelles déférentes seront les surfaces ayant (A) pour focale, et passant en O, O_1. Les sphères directrices seront tangentes en O, O_1 à la déférente qui leur est associée, et auront leur centre dans le plan de (A); elles couperont par conséquent leur déférente suivant deux cercles. Ainsi les focales de la cyclide seront les six cercles ayant leurs centres dans le plan de (A) et appartenant aux trois surfaces homofocales qui passent en O, O_1. Ce fait donne lieu à la remarque suivante.

La cyclide étant la réciproque d'un cône, les focales de la cyclide sont les transformées des 6 droites focales du cône. Ce sont par conséquent des cercles; mais, comme les focales du cône sont situées trois à trois dans quatre plans tangents au cercle de l'infini, nous voyons que les six cercles focaux de la cyclide sont trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. En rapprochant ce résultat du précédent, nous obtenons la proposition qui suit :

Les six cercles de trois quadriques homofocales qui passent par un point commun et qui ont leurs centres dans le même plan principal sont situés trois à trois sur quatre sphères de rayon nul. Ces quatre sphères sont des points de la focale située dans le plan principal considéré.

Il est à remarquer que les tangentes à la cyclide en un des points coniques O, O_1 forment un cône supplémentaire du cône de même sommet, ayant la conique déférente (A) pour base. Ce dernier cône est donc supplémentaire du cône réciproque de la cyclide à deux points doubles ([1]).

58.

De la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points coniques.

Parmi les réciproques de cônes du second degré se trouvent le tore et la cyclide de M. Dupin, qui sont les réciproques des cônes de révolution du second degré. Ceci nous conduit à préciser les conditions dans lesquelles on obtiendra la cyclide de M. Dupin.

Supposons qu'on prenne une conique déférente quelconque (A), mais que la sphère directrice (S) soit tangente en

---

([1]) Dans la classe que nous étudions, et qui est caractérisée par cette propriété, que la déférente et la sphère directrice soient doublement tangentes, il existe une espèce remarquable de cyclides que, dans cette étude générale, nous laissons de côté. Ce sont les cyclides de révolution qui peuvent être considérées comme ayant pour déférente une surface de révolution, et pour sphère directrice une quelconque des sphères coupant suivant deux cercles parallèles cette surface de révolution. La directrice et la déférente sont bien doublement tangentes, mais en deux points sur le cercle de l'infini. Quand les cyclides à deux points doubles considérées dans le texte ont ces deux points doubles imaginaires, le cercle lieu des points à distance nulle des deux points doubles est réel, et en mettant le pôle de transformation en un point quelconque de ce cercle, la cyclide se transforme en une cyclide de révolution.

Toutes les cyclides réciproques de cônes ou de cyclides de révolution sont définies par une équation de la forme

$$at + a't' + a''t'' = 0 ,$$

entre les tangentes menées à trois quelconques des sphères inscrites. Quatre de ces sphères se réduisent à des points réels ou imaginaires, qui sont sur le cercle déjà considéré, lieu des points à distance nulle des deux points doubles.

deux points a, a' à la conique (A). Les deux points-sphères O, O_1 de l'article précédent étant doublement tangents en a, a' à (A), seront des points de la focale (A_1) de (A); le cône de sommet O et de base (A) sera de révolution, et par suite, d'après les résultats de l'article précédent, la cyclide sera une réciproque de cône de révolution.

Donc, *la cyclide de M. Dupin est l'enveloppe des sphères dont les centres décrivent une conique quelconque* (A) *et qui passent par un point de la focale* (A_1) *de cette conique, ou, plus généralement, qui sont orthogonales à une sphère quelconque doublement tangente à* (A).

Cette cyclide a évidemment quatre points doubles O, O_1, a, a', dont deux au moins sont imaginaires, mais qui peuvent l'être tous : O, O_1 et a, a' sont alors deux à deux imaginaires conjugués. Le cône de sommet O et de base (A) étant de révolution, la cyclide sera la réciproque d'un cône de révolution; mais la transformation ne pourra pas toujours se faire d'une manière réelle. Voyons ce que deviennent ici les cinq modes de génération de toute cyclide. On a

1°, 2° Conique déférente (A), sphère directrice réduite à un point O ou O_1, ou toute sphère tangente en a, a' à (A). Ce mode compte pour deux;

3°, 4° (A_1) Conique focale de (A) déférente, sphère directrice réduite à un point a ou a', ou toute sphère tangente en O, O_1 à (A_1). Ce mode compte aussi pour deux;

5° Déférente, la quadrique ayant (A) et (A_1) pour focale, et passant en O, O_1, a, a', qui sont des ombilics de cette surface; sphère directrice, la sphère tangente en O, O_1, a, a' à cette quadrique et la coupant suivant les 4 droites Oa, Oa', O_1a, O_1a'.

Ainsi, la cyclide de M. Dupin, ou cyclide à quatre points doubles, admet deux séries de sphères inscrites dont les centres décrivent deux coniques focales l'une de l'autre; elle a quatre points doubles, situés par couples sur ces deux focales O, O et a, a' et contient les quatre droites de longueur nulle qui joignent O, O_1 à a, a'.

De plus, elle admet une série de sphères doublement tangentes, dont les centres décrivent une quadrique quelconque, et qui sont orthogonales à une sphère fixe. Cette sphère est tangente à la quadrique en deux de ses ombilics, et par conséquent la coupe suivant quatre droites qui forment un quadrilatère dont les sommets sont les quatre points doubles de la cyclide.

Nous avons vu que la cyclide est la réciproque d'un cône, et cette propriété rend, pour ainsi dire, évidentes toutes les propositions relatives à cette surface. Mais on peut aussi, comme l'a fait M. Mannheim [1], considérer la cyclide comme la transformée d'un tore. Nous savons qu'un au moins des couples O, O_1 et a, a' de points coniques de la cyclide est imaginaire. Si a et a' par exemple sont imaginaires, le cercle lieu des points à distance nulle de a, a' sera réel. En prenant le pôle en un point de ce cercle, la transformée de la cyclide sera un tore, car les cercles qui passaient en a, a' auront après la transformation leurs plans parallèles. Donc,

Pour transformer la cyclide en un tore, il faut placer le pôle de transformation sur un des deux cercles lieux des points à distance nulle soit de O et de O_1, soit de a et de a'. Ces deux cercles peuvent être réels tous les deux (quand les quatre points doubles sont imaginaires). Il y en aura toujours au moins un qui sera réel.

Ainsi, on peut toujours déduire la cyclide du tore par une transformation réelle.

Nous n'étudierons pas la cyclide d'une manière plus détaillée, et nous indiquerons seulement la proposition suivante :

Il y a une cyclide à trois plans de symétrie.

Étant donné un cône de révolution, transformons-le par rayons vecteurs réciproques, et prenons le pôle O de transformation dans le plan principal perpendiculaire à l'axe. La

---

[1] MANNHEIM : Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois surfaces données. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860, p. 67.)

cyclide réciproque aura trois plans de symétrie : 1° le plan principal contenant le pôle O; 2° le plan passant par ce pôle et par l'axe de révolution; 3° le plan réciproque de la sphère concentrique au cône et passant en O.

L'équation de cette cyclide serait de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2\alpha(x^2-y^2)+\beta z^2+\alpha^2=0.$$

Nous venons d'énumérer dans cet article et dans le précédent les surfaces dans lesquelles on peut inscrire des sphères. On peut être surpris de ne pas voir figurer parmi ces surfaces les réciproques des surfaces de révolution. Cela tient à un fait général :

Toute surface réciproque d'une surface de révolution est aussi une réciproque de cône.

En effet, toutes les sphères inscrites dans une surface de révolution ont leurs centres en ligne droite, et coupent à angles droits tous les plans passant par l'axe. On voit donc que les sphères réciproques couperont à angles droits toutes les sphères passant par un cercle; en particulier, elles contiendront les deux sphères de rayon nul passant par ce cercle. Ainsi, la surface réciproque sera l'enveloppe d'une suite de sphères passant par deux points fixes (imaginaires), et, en plaçant le pôle de transformation en un de ces points fixes, elle se transformera en un cône ([1]).

59

Des cyclides ayant pour déférentes les surfaces inscrites dans la sphère.

Enfin, si la déférente était un cône, la cyclide se réduirait à la sphère ayant pour centre le sommet du cône, et orthogonale à la sphère directrice; ou plutôt, elle se réduirait à une portion de cette sphère.

([1]) Les réciproques de surfaces de révolution du second degré présentent une propriété remarquable; elles ont trois points doubles dont deux sont imaginaires.

Si la déférente est une surface de révolution inscrite dans la sphère, la ligne de contact de cette quadrique est une ligne double de la cyclide, qui se décompose par conséquent en deux sphères se coupant suivant cette ligne double, réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère directrice. Ces sphères auront pour centres les deux foyers de la surface de révolution.

L'étude de ce cas simple nous sera très utile dans la suite; mais nous pouvons dès à présent reconnaître que les remarques précédentes sont d'une grande importance dans la théorie des surfaces inscrites à une même quadrique, théorie qui a été l'objet de beaux travaux de plusieurs géomètres, et notamment de MM. Cayley et Casey.

On voit, en effet, qu'à une série de surfaces inscrites à une quadrique (qu'on peut supposer être la sphère (S)) correspondent des anallagmatiques formées de deux sphères réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère (S).

La théorie des surfaces inscrites dans une quadrique est ainsi ramenée à celle d'un système de sphères, c'est-à-dire de quadriques contenant une courbe fixe.

Nous allons donner quelques exemples.

Supposons que l'on propose de construire une surface inscrite à (S) et tangente à quatre plans. Les deux sphères correspondantes à cette surface devront passer chacune par 4 des 8 points correspondants aux 4 plans, ce qui donnera 8 solutions. Chaque groupe de deux sphères étant connu, on en déduira la déférente qui aura pour foyers les centres des deux sphères, et qui contiendra leur cercle d'intersection. Elle sera ainsi complètement déterminée.

Étant données quatre sphères, on sait que, si par les intersections de ces sphères prises deux à deux, on fait passer d'autres sphères, orthogonales à une sphère fixe (S), ces six sphères se coupent en deux points. Donc,

Étant données quatre surfaces inscrites à une quadrique, les 12 sommets des cônes circonscrits à deux de ces surfaces

sont 6 à 6 dans 8 plans. C'est la généralisation d'un théorème connu pour les sections coniques.

Enfin, le problème suivant :

« Construire une quadrique inscrite à (S) et tangente à quatre autres quadriques inscrites à (S), »

se ramène à celui-ci :

Construire une sphère tangente à quatre sphères données.

On pourrait multiplier les exemples; mais nous préférons faire remarquer que le mode de transformation indiqué ici supplée à une lacune que présente la géométrie de l'espace par rapport à la géométrie plane.

En effet, dans le plan, on peut raisonner de la manière suivante :

Soient les sections planes d'une sphère; si on les projette d'un point de la sphère sur le plan, elles deviennent des cercles; si on les projette d'un point extérieur à la sphère, elles se transforment en des coniques doublement tangentes à un cercle. On voit donc, dans le plan, que la théorie des courbes inscrites à une conique et celle des courbes passant par deux points sont identiques l'une à l'autre, et constituent, s'il est permis de le dire, une seule théorie vue sous deux aspects différents, celle des sections planes d'une quadrique.

Comme on n'a pas d'espace à quatre dimensions, les méthodes de projection ne s'étendent pas à la géométrie de l'espace; mais les remarques et les méthodes qui précèdent ont l'avantage de suppléer, d'une manière claire, à celles qui nous font ici défaut.

60.

Des sections planes et sphériques des cyclides.

Cherchons d'abord les droites qui sont placées sur la cyclide, et qui rencontrent le cercle de l'infini. Soit δ l'une de ces droites. Elle sera nécessairement tangente à chacun des cinq cônes doublement tangents à la cyclide, et l'on pourra

par conséquent mener un plan tangent à ce cône par la droite δ.

Ce plan tangent, qui doit couper la surface suivant deux cercles, devra contenir une droite δ' qui, associée à δ, puisse former un cercle de rayon nul. Nous aurons donc *toutes* les droites de la cyclide, en examinant, dans une quelconque des cinq séries doubles de cercles, quels sont ceux de ces cercles qui se décomposent en deux droites.

Les centres de ces cercles doivent évidemment appartenir à la fois à la cyclide et à sa focale. Chaque cyclide est coupée en 8 points par une de ses focales, et par ces 8 points passent 16 droites qui appartiennent à la cyclide.

Ces 16 droites forment 8 cercles de rayon nul, dérivés des génératrices de la déférente qui sont tangentes à la sphère directrice.

Dans un Mémoire déjà cité, M. Clebsch a étudié les dispositions relatives de ces 16 droites; mais nous voyons ici que cette étude se ramène à celle d'un problème connu. Si, en effet, on transforme la cyclide par rayons vecteurs réciproques, en mettant le pôle de transformation sur la surface, elle se transforme en une cyclide du 3e degré. Les droites qui rencontrent le cercle de l'infini se transforment en de nouvelles droites rencontrant le même cercle. Donc

La disposition des 16 droites d'une cyclide est la même que celles des droites d'une surface du 3e degré qui rencontrent une conique de cette surface (1).

Quant aux 11 autres droites de la cyclide cubique, transformée de la cyclide générale, nous les avons déjà étudiées. L'une est à l'infini dans le plan tangent à la première cyclide au pôle. Les 10 autres sont les réciproques des 10 cercles qui passent au pôle.

---

(1) Depuis la présentation de ce Mémoire à l'Académie en 1869, M. Geiser, de Zurich, naturellement sans connaître notre travail, a développé la même méthode dans un Mémoire inséré au *Journal de Borchardt*, t. LXX, p. 249.

Considérons maintenant les sections par des plans et des sphères quelconques. Une remarque générale nous servira de guide dans l'étude de cette question.

Supposons que, étant donnée une sphère directrice, on prenne pour surface déférente une développable quelconque. Aux plans tangents de cette développable correspondent les points d'une courbe anallagmatique (Γ). A toute ligne tracée sur la développable correspondra une surface enveloppe de sphères contenant cette courbe, et chacune des sphères sera, en général, tangente à la courbe en deux points a, a', réciproques l'un de l'autre par rapport à la sphère directrice. A toute ligne double de la développable correspondra au contraire une surface enveloppe de sphères contenant la courbe (Γ_1), et telle que chaque sphère soit tangente à la courbe en quatre points a, a', b, b', réciproques par couples par rapport à la sphère directrice.

Cela posé, soient (Σ), (Σ') deux anallagmatiques par rapport à la même sphère directrice, et soient (B), (B') leurs déférentes. Il est clair que, à tout point commun à (Σ), (Σ'), correspondra un plan tangent commun à (B), (B'), et par conséquent les points de la courbe d'intersection des deux anallagmatiques seront dérivés des plans tangents de la développable circonscrite à (B) et à (B'). On pourra appliquer à cette développable toutes les remarques que nous venons de faire.

Si l'une des deux surfaces n'est pas anallagmatique, on pourra lui adjoindre sa réciproque par rapport à (S), et ces deux surfaces constitueront ainsi un système anallagmatique (Σ).

Soit, par exemple, une cyclide définie par la déférente (A), et cherchons son intersection avec une sphère (S'), orthogonale à (S), de centre C. La sphère (S') est l'anallagmatique dérivée du point C; car tous les plans passant par C donnent des points de (S'). La développable circonscrite aux deux déférentes est donc le cône de sommet C circonscrit à la quadrique (A). Donc

Aux coniques de la déférente correspondent sur la cyclide les sections par des sphères orthogonales à (S), *et ayant leur centre au pôle du plan des coniques par rapport à la déférente.*

Étudions maintenant l'intersection de deux cyclides ayant même sphère directrice (S), et ayant pour déférentes deux quadriques quelconques (A), (A').

Les points communs aux deux cyclides seront dérivés des plans de la développable $\left|\overline{(A)(A')}\right|$, et aux coniques doubles de cette développable correspondront quatre cyclides à deux points doubles, contenant l'intersection des cyclides données. Nous allons étudier des cas particuliers importants.

Supposons qu'on demande de déterminer l'intersection d'une cyclide et d'une sphère (U), de centre C quelconque. Adjoignons à cette sphère la réciproque (U') par rapport à (S) et de centre C', et les deux sphères constitueront un système anallagmatique, qui admettra pour déférente une surface de révolution (B), ayant pour foyers les centres C, C' des deux sphères, et inscrite à la sphère directrice (art. 59) en tous les points où celle-ci est rencontrée par (U) ou par (U').

Si (A) est la déférente de la cyclide, la développable $\left|\overline{(A)\,(B)}\right|$, considérée comme surface déférente, nous donnera les points d'intersection de (U) et de la cyclide. Les quatre coniques doubles de cette développable donneront quatre cyclides enveloppes de sphères, contenant la courbe; et les sphères inscrites dans ces quatre cyclides couperont la sphère sécante suivant quatre séries de cercles doublement tangents à la section cherchée.

On aura donc les élements nécessaires pour déterminer cette cyclide, et l'on voit que les quatre cônes ayant pour sommet le point C et pour bases les quatre lignes doubles sont les lieux des centres des sphères de chaque série doublement tangentes à la courbe de section. Ces cônes sont homofocaux. Quant aux sphères contenant les focales de la section, elles coupent la sphère (S) suivant les mêmes cercles que les plans des lignes doubles correspondantes de la développable

$\boxed{(A)\,(B)}$. Comme elles sont aussi orthogonales à (U), elles peuvent être considérées comme déterminées.

Comme application de ces constructions, cherchons la condition pour que la sphère sécante coupe suivant une courbe située sur un cylindre. Il faudra que l'une des focales soit plane, c'est-à-dire que le plan de l'une des lignes doubles de la développable $\boxed{(A)\,(B)}$ passe au point C. Car, dans ce cas, le cône qui avait pour base la ligne double contenue dans ce plan, et qui contenait les centres des sphères tangentes doubles d'une série, se réduira à un plan. Ainsi il passera par le point C, 1, 2, 3 des faces du tétraèdre conjugué à (A) et à (B), suivant que la courbe sera sur 1, 2 ou 3 cylindres. Cherchons d'abord la condition pour qu'un seul cylindre contienne la courbe.

Soit (P) le plan passant par C et ayant même pôle par rapport à (B) et à (A). Comme C est le foyer de (B), ce pôle devra être sur une perpendiculaire élevée à (P) en C. Or, il n'y a que trois plans passant par le point C et ayant leurs pôles par rapport à (A) sur une droite perpendiculaire. Ce sont les trois plans de symétrie du cône de sommet C, circonscrit à (A). Ces plans une fois connus, le reste de la construction ne présente aucune difficulté.

Une application plus intéressante consiste dans la détermination des coniques sphériques qui se trouvent sur la cyclide. Alors le point C, foyer de la surface (B) et centre de la sphère sécante, devra avoir même plan polaire par rapport à (B) et à (A). Son plan polaire par rapport à (A) devra donc être perpendiculaire à l'axe focal OC de la surface de révolution (B) (O est le centre de la sphère directrice). Ainsi,

Le lieu des centres des sphères coupant la cyclide suivant une conique sphérique est une courbe telle que le plan polaire d'un de ses points C par rapport à (A) soit perpendiculaire à la droite OC.

Cette courbe se rencontre dans la théorie des normales à une quadrique. C'est une cubique gauche passant par le point O, par le centre de (A), ayant pour directions asympto-

tiques les axes de (A), passant par les pieds des normales menées de O à (A), etc.

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Si des centres des cinq sphères directrices on abaisse des normales sur les déférentes correspondantes, on obtient 30 points qui avec les 5 centres des sphères directrices sont sur une cubique gauche ayant pour directions asymptotiques les axes de symétrie des déférentes, et passant par leur centre. Cette cubique gauche est le lieu des centres des sphères coupant la surface suivant des coniques sphériques.

A chaque point C de la cubique correspond une seule sphère (U), qu'on déterminera ainsi. Soit (P) le plan polaire de C, perpendiculaire à OC. La surface de révolution inscrite à (S), ayant C pour foyer, (P) pour plan directeur correspondant, sera la déférente de (U); (U) passera donc par le cercle de contact de cette surface, et, comme elle a son centre en C, elle est déterminée.

Parmi les sphères coupant suivant des coniques sphériques, il y en a plusieurs qui sont remarquables.

1° Les cinq sphères concentriques aux sphères directrices, mais ayant pour rayons ceux de ces sphères multipliées par $\sqrt{-1}$.

2° Celles qui ont leurs centres aux pieds des normales abaissées des centres des sphères directrices sur les déférentes correspondantes. *Ces sphères coupent la cyclide suivant deux de leurs grands cercles.* La droite d'intersection des plans de ces cercles est donc une normale double de la cyclide.

Il y a donc cinq groupes de six normales doubles de la cyclide.

Il est utile de savoir déterminer les points à l'infini de toute section sphérique de la cyclide. On peut construire ces points de la manière suivante :

Soit (U) une sphère sécante de centre C'.

Les points à l'infini de la section sont ceux du cercle de l'infini pour lesquels la sphère et la cyclide seront tangentes.

Les plans tangents en ces points devront passer par le centre de la sphère et être tangents à la développable circonscrite à la cyclide sur le cercle de l'infini, c'est-à-dire à la développable focale (art. 53) circonscrite aux cinq déférentes.

Donc les points à l'infini de la section sphérique sont les points de contact avec le cercle de l'infini des quatre plans déterminant par leurs intersections les focales du cône de sommet C circonscrit à (A). Ces points de contact sont évidemment sur les plans perpendiculaires aux focales de ce cône.

On voit que les points à l'infini de la cyclique ne dépendent que du centre, et non du rayon de la sphère sécante.

Pour qu'ils viennent se réunir par groupes de deux, c'est-à-dire *pour que la cyclique devienne une cartésienne, il faut et il suffit que la sphère sécante ait son centre sur une des focales des déférentes.*

Si le centre de la sphère s'éloigne à l'infini sur la focale, elle se transforme en un plan perpendiculaire à l'asymptote de la focale, et ce plan coupe suivant des ovales de Descartes.

Il y a donc six séries de sections parallèles donnant des ovales de Descartes. Deux de ces séries seulement sont réelles.

On peut encore établir ce résultat de la manière suivante :

Les deux nappes de la cyclide qui se croisent au cercle de l'infini sont tangentes l'une à l'autre en quatre points, qui sont les points de contact avec le cercle de l'infini des quatre génératrices suivant lesquelles la développable circonscrite aux déférentes (A_i) est coupée par le plan de l'infini. Donc tous les plans passant par deux de ces quatre points couperont la cyclide suivant une courbe ayant deux rebroussements à l'infini; ce sera donc une cartésienne plane.

Les directions de ces sections cartésiennes sont aussi celles des sections circulaires des quadriques (V) de l'article 41 inscrites dans la cyclide.

Dans le cas où la cyclide aurait pour déférente une surface de révolution, c'est-à-dire serait une cartésienne (art. 55), les

deux séries d'ovales de Descartes réelles viendraient se confondre en une seule. Les cyclides cartésiennes correspondent donc aux surfaces de révolution de la théorie des quadriques.

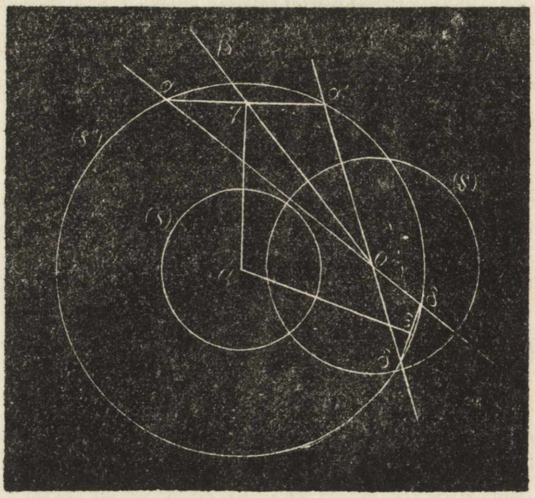
Toute cyclide peut d'ailleurs être transformée en cartésienne par la méthode des rayons vecteurs réciproques. Il suffira (art. 24) de placer le pôle en un point quelconque de l'une des cinq focales.

En terminant, nous nous proposerons une question en quelque sorte réciproque des précédentes : Étant donnée une cyclique, peut-on la placer sur une cyclide d'une espèce donnée, par exemple sur un tore?

Soit (D) le cône de sommet a coupant la sphère (S) de centre O suivant la cyclique donnée. Les sphères doublement tangentes d'une même série seront toutes orthogonales à une sphère (S') de centre a, orthogonale à (S), et elles auront leurs centres sur un cône (E) de sommet O, supplémentaire du cône (D) (art. 19). Pour que la cyclique soit sur un tore, il faudra que les sphères doublement tangentes de même rayon aient leurs centres sur un ou plusieurs cercles. Or toutes celles de ces sphères qui ont le même rayon auront leurs centres à l'intersection du cône (E) et d'une sphère (S″) concentrique à (S'), c'est-à-dire sur une cyclique. Ces sphères enveloppent en général une surface du 8ᵉ ordre; mais cette surface se décompose en deux tores, si la cyclique des centres se décompose en deux cercles. Il faudra donc qu'une sphère (S″), concentrique à (S'), coupe le cône (E) suivant deux cercles, et, pour cela, la première condition est que le centre a de (S″) soit dans un plan principal de (E), ou, comme (E) et (D) sont supplémentaires, qu'un plan de symétrie de (D) passe au centre O de (S). Il faut donc que la cyclique, intersection de (S) et de (D), ait un plan de symétrie. Cette condition, qui était évidente *a priori*, est d'ailleurs suffisante.

Soient, en effet, $O\alpha$, $O\alpha'$ les génératrices du cône (E) situées dans le plan principal ; et soit $O\beta$ le diamètre conjugué

à l'une des deux séries de sections circulaires de ce cône, qui sont perpendiculaires au plan principal. Si du point a on



abaisse la perpendiculaire $a\gamma$ sur la direction de la section circulaire, elle rencontre le diamètre $O\beta$ en un point γ, et il est clair que la section circulaire de diamètre $\alpha\alpha'$, dont le plan passe en γ, sera sur une sphère de centre a, coupant le cône suivant deux cercles $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$. A ces deux cercles correspondent deux tores, qui contiennent la cyclique, et dont les axes sont les droites $a\gamma$, $a\varepsilon$, focales du cône (D). Aux deux autres cônes passant par la courbe correspondent quatre nouveaux tores. Donc,

Quand une cyclique a un plan de symétrie, elle peut être placée sur six tores, dont les axes sont les focales situées dans le plan de symétrie des trois cônes passant par la courbe.

On voit par la construction précédente que, *si la cyclique est une cartésienne, il n'y a pas de tore contenant la courbe.* Les droites $a\gamma$, $O\gamma$ sont parallèles, et les tores se réduisent aux trois cônes contenant la cyclique. Cette remarque sépare les cartésiennes des autres cycliques à plans de symétrie.

La question précédente a été traitée pour les cycliques planes par M. de la Gournerie dans son Mémoire, déjà cité, sur les lignes spiriques.

La détermination des cyclides à quatre points doubles contenant une cyclique ne présenterait aucune difficulté. Les points doubles de ces cyclides décrivent les focales; les coniques déférentes sont sur un des cônes contenant les focales, et leurs plans enveloppent un autre cône contenant la même focale, etc.

61.

Du système orthogonal formé par les cyclides homofocales, et des propriétés d'une méthode de transformation déjà définie.

Nous avons vu (art. 44) comment le mode de génération des surfaces anallagmatiques, proposé par M. Moutard, revient à un procédé de transformation des figures, dans lequel à un point μ de la *première* figure correspondent, dans la *deuxième* figure, deux points m, m', par la construction suivante.

Soit (P) le plan polaire de μ par rapport à la sphère (S). Les points m, m' sont les centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de (P) et de (S).

Quand le point μ décrit une surface (A), le plan (P) enveloppe une surface (A'), et les deux points m, m' décrivent une surface anallagmatique ayant (A') pour déférente, (S) pour sphère directrice.

Le plan P est tangent en un point M à (A'), et comme Mm, Mm' sont les normales en m, m' à l'anallagmatique, nous concluons que

Les plans tangents en m, m' *à l'anallagmatique et le plan tangent en* μ *à* (A) *vont se couper suivant une même droite située dans le plan* (P), *et qui est la polaire du point* M *par rapport au cercle, intersection de* (S) *et de* (P).

De cette importante proposition, qui donne la construction des plans tangents et qui s'applique évidemment aux tangentes à deux courbes correspondantes, nous allons déduire un principe énéral, tout à fait analogue à celui de la conservation

des angles dans la transformation par rayons vecteurs réciproques. A cet effet, nous rappellerons quelques définitions.

Plusieurs géomètres, et en premier lieu M. Cayley, en vue de généraliser les déterminations métriques de la géométrie, ont substitué au cercle de l'infini, dans la définition des angles, une quadrique quelconque (Q). Étant donnés deux plans (P), (P'), si par leur intersection on mène deux plans tangents (T), (T') à la quadrique (Q), on peut appeler angle des deux plans la fonction V définie par l'équation

$$e^{2iV} = R\,, \quad V = \frac{1}{2i}\log R\,,$$

R désignant le rapport anharmonique des quatre plans (P), (P'), (T), (T'). Si les deux plans (P), (P') sont conjugués dans la quadrique, l'angle V est droit, le rapport anharmonique R étant égal à — 1.

De même, on appelle angle de deux droites une fonction V' définie par l'équation

$$e^{2iV'} = R'\,, \quad V' = \frac{1}{2i}\log R'\,,$$

R' étant le rapport anharmonique des deux droites et des tangentes menées dans leur plan et de leur point de rencontre à la quadrique (Q). Il est clair que, si les deux droites sont conjuguées dans la quadrique, leur angle ainsi défini est droit.

Les définitions précédentes concordent avec les définitions habituelles, quand la quadrique (Q) devient le cercle de l'infini. Pour distinguer les angles tels que nous venons de les définir, nous les appellerons angles par rapport à la quadrique (Q).

Cela posé, la transformation que nous étudions possède une propriété fondamentale : elle conserve les angles, c'est-à-dire que les angles de la première figure, mesurés par rapport à la sphère (S), sont égaux aux angles ordinaires de la seconde.

Soient, en effet, μt, $\mu t'$ les tangentes à deux courbes pas-

sant en μ et allant rencontrer en deux points t, t' le plan polaire (P) de μ. Les tangentes en m aux deux courbes anallagmatiques correspondantes iront rencontrer les premières tangentes aux deux points t, t'. D'ailleurs la droite tt' coupe la sphère en deux points a, a' et il est clair que les deux faisceaux de quatre droites

$$\begin{array}{cccc} mt & mt', & ma, & ma', \\ \mu t, & \mu t', & \mu a, & \mu a' \end{array}$$

ont le même rapport anharmonique R.

Mais les deux droites μa, $\mu a'$ sont des tangentes à la sphère, puisque μ est le pôle du plan (P) contenant a, a'. L'angle V [dans la sphère (S)] des droites μt, $\mu t'$ est donc égal à

$$\frac{1}{2i} \log R.$$

De même, puisque m est le centre d'une sphère de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (P) et, par conséquent, par a, a'; ma, ma' sont des droites allant rencontrer le cercle de l'infini, et par suite l'angle *ordinaire* des droites mt, mt' est aussi égal à

$$\frac{1}{2i} \log R.$$

La proposition est donc démontrée pour l'angle de deux courbes; elle subsiste d'ailleurs pour l'angle de deux surfaces, ou pour l'angle d'une surface et d'une courbe.

Les conséquences les plus importantes de ce principe de la conservation des angles se rapportent au cas où les angles sont droits, et, en nous souvenant que les directions à angle droit dans la sphère sont celles qui sont conjuguées dans cette surface, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Si les tangentes à deux courbes de la première figure en leurs points communs sont conjuguées dans la sphère, les courbes anallagmatiques correspondantes se coupent à angle droit.

Si deux surfaces de la première figure se coupent en des

points pour lesquels les plans tangents sont conjugués dans la sphère (S), les surfaces anallagmatiques correspondantes se coupent à angle droit.

Si l'on a, dans la première figure, un système triple formé de surfaces telles que, en tous les points communs à deux surfaces, les plans tangents soient conjugués dans la sphère, le système triple d'anallagmatiques correspondant sera formé de surfaces orthogonales.

Plus généralement,

Toutes les fois qu'on aura un système triple de surfaces telles que, en tous les points communs à deux d'entre elles, les plans tangents soient conjugués dans une quadrique fixe (Q), on pourra déduire de ce système un système triple orthogonal.

Il suffira, en effet, de transformer par l'homographie le système entier de manière que (Q) devienne une sphère, et d'appliquer alors la proposition précédente. On peut encore, en tenant compte des définitions qui précèdent énoncer ainsi le théorème :

De tout système triple orthogonal par rapport à une quadrique, on peut déduire un système triple orthogonal ordinaire, et réciproquement.

L'existence du système triple orthogonal formé par les cyclides homofocales est une conséquence directe des propositions précédentes.

Soient, en effet, une suite de quadriques inscrites dans une même développable circonscrite à la sphère (S). Nous avons vu (art. 47) que les cyclides correspondantes sont homofocales; et d'ailleurs, comme il passe trois quadriques réelles du système par tout point intérieur à la sphère (S), il passera trois cyclides homofocales, toujours réelles, par tout point réel de l'espace. Comme les plans tangents à deux quadriques en un point commun à ces deux surfaces sont conjugués dans la sphère, les cyclides correspondantes se couperont à angle droit.

62.

Généralisation des notions de normales, de focales et de lignes de courbure.

Étant donnée une surface quelconque, joignons chacun de ses points au pôle du plan tangent à la surface, par rapport à une quadrique fixe que nous pouvons supposer être la sphère (S). On aura ainsi, pour chaque point de la surface considérée, une droite que nous appellerons la normale [par rapport à (S)] de la surface.

Une ligne de courbure sera le lieu des points pour lesquels les normales ainsi définies forment une surface développable.

De même, on appellera focale [par rapport à (S)] de la surface les lignes doubles de la développable circonscrite à (S) et à la focale.

En adoptant ces définitions, qui constituent une extension naturelle de celles qui sont en usage, nous allons voir que notre méthode de transformation, qui conserve les angles, conserve aussi les lignes de courbure et les focales, c'est-à-dire qu'elle transforme les lignes de courbure et les focales, telles que nous venons de les définir, en lignes de courbure et en focales ordinaires de l'anallagmatique. Commençons par les focales.

Nous avons vu (art. 43) que, si l'on circonscrit à une surface (B) et à la sphère une développable (Δ), à (Δ) correspond dans la deuxième figure une développable (Δ'), circonscrite à l'anallagmatique (Σ) correspondante de (B), et au cercle de l'infini. Les lignes doubles de ces développables sont aussi correspondantes, et comme elles sont, par définition et respectivement, les focales de (B) [par rapport à (S)] et les focales ordinaires de l'anallagmatique, on voit que les focales se conservent dans notre transformation. Il importe cependant de faire une exception : la courbe de contact de (Δ) et de (S),

qui n'est pas courbe double de (Δ), est courbe double de (Δ'), et par conséquent focale de (Σ).

Considérons maintenant les lignes de courbure de (B) [par rapport à (S)]. En tous les points d'une telle ligne (Γ), les normales forment une développable (R). A cette courbe (Γ) correspond sur (Σ) une ligne (Γ'), et la développable (R) a pour homologue une surface enveloppe de sphères (R'), dont tous les cercles sont normaux à (Σ) en tous les points de (Γ'), d'après le principe de la conservation des angles. Puisque (Γ') coupe à angle droit tous les cercles de (R'), cette surface admettra (Γ') comme ligne de courbure, et puisque (Σ) et (R') se coupent à angle droit, (Γ') sera aussi ligne de courbure de (Σ), ce qu'il fallait démontrer.

Puisque les lignes de courbure se correspondent et que les angles se conservent dans notre transformation, on pourra étendre l'important théorème de M. Dupin sur les systèmes orthogonaux aux lignes de courbure généralisées, et donner la proposition suivante :

Un système triple orthogonal par rapport à une quadrique est formé de surfaces se coupant suivant leurs lignes de courbure (par rapport à cette quadrique).

Ce théorème suffit à la détermination des lignes de courbure d'une quadrique (A) par rapport à une quadrique (Q). Ce seront les lignes suivant lesquelles (A) sera coupée par les quadriques inscrites dans la développable $\overline{\lfloor (A)\ (Q) \rfloor}$. Mais on en déduit surtout cette nouvelle définition des lignes de courbure généralisées :

Les lignes de courbure de toute surface par rapport à (Q) sont les lignes passant en un point de la surface, et dont les deux tangentes sont conjuguées à la fois dans l'indicatrice de la surface et dans la quadrique (Q).

On pourrait ajouter à ces exemples l'extension du théorème de Joachimsthal, d'après lequel, si deux surfaces ont une ligne de courbure commune, elles se coupent sous un angle constant. Nous réservons pour le moment toutes ces consé-

quences, ainsi que l'extension très intéressante de la notion de ligne géodésique, et nous allons terminer par quelques applications à la théorie des cyclides.

On sait, par exemple, que, étant données deux quadriques (Q), (Q′), homofocales par rapport à (S) [c'est-à-dire inscrites dans une développable circonscrite à (S)], les droites tangentes à ces deux quadriques se groupent de deux manières différentes, en surfaces développables se coupant à angle droit dans (S) [c'est-à-dire telles que les plans tangents aux deux développables contenant une même droite soient conjugués dans (S)].

Les droites se transformant en cercles orthogonaux à (S), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles tangents à deux cyclides homofocales et orthogonaux à une des sphères directrices des cyclides peuvent se grouper de deux manières différentes sur deux séries de surfaces enveloppes de sphères. Ces surfaces se coupent à angle droit et par conséquent tous les cercles sont normaux à un troisième système de surfaces.

Les surfaces enveloppes de sphères sont tangentes à l'une des cyclides et ont leur arête de rebroussement sur l'autre, en sorte que les sphères enveloppées sont normales à l'une des cyclides et tangentes à l'autre.

Nous donnerons encore l'exemple suivant :

Tous les cônes de même sommet circonscrits à des surfaces homofocales [par rapport à (S)] sont homofocaux. Donc

Deux points quelconques réciproques par rapport à (S) peuvent être pris pour sommets d'une série de cyclides à deux points doubles (réciproques de cône), circonscrites à toutes les cyclides homofocales.

Ces cyclides sont homofocales et orthogonales. Leurs focales sont les six cercles orthogonaux à (S) et appartenant aux trois cyclides du système orthogonal passant aux sommets considérés, ces six cercles sont trois à trois sur quatre sphères de rayon nul.

Si les deux sommets sont pris sur une des focales [non située sur (S)], ces cyclides deviennent des cyclides à quatre points doubles.

C'est la généralisation du théorème important sur les cônes de révolution circonscrits aux quadriques homofocales.

NOTES ET ADDITIONS

Note I.

De l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée.

Nous avons indiqué à l'article 6 une méthode nouvelle pour obtenir l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée. On peut former cette équation dans le cas général, en employant les paramètres différentiels analogues à ceux de Lamé, et dont la théorie a été développée surtout par M. Beltrami.

Soit

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2$$

l'expression de la distance de deux points infiniment voisins, et introduisons les notations suivantes,

$$\Delta_1\varphi = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2},$$

$$\Delta_1(\varphi,\psi) = \frac{\mathrm{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \mathrm{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \mathrm{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2},$$

$$\Delta_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\right\}$$

Ces fonctions seront des invariants.

La détermination des lignes géodésiques dépendra de l'intégration de l'équation

$$\Delta_1\varphi = \text{const} ;$$

celle des lignes isothermes, de l'équation

$$\Delta_2 \varphi = 0 .$$

L'équation différentielle des surfaces applicables s'exprime au moyen de ces invariants. En appelant x la coordonnée rectangulaire d'un point de la surface, on trouvera pour x l'équation différentielle du second ordre

$$2\Delta_1(x, \Delta_1 x)\Delta_2 x - \Delta_1\Delta_1 x = -4k\Delta_1(\Delta_1 - 1) .$$

k désignant la courbure de la surface.

La méthode que nous avons indiquée dans le texte est susceptible d'applications nombreuses. Pour le moment, nous nous contenterons de montrer comment elle conduit à l'équation différentielle qui détermine le rayon vecteur mené à un point fixe d'un point quelconque de la surface.

Rapportons la surface à des coordonnées polaires ordinaires r, θ, φ. On devra avoir

$$dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2 ,$$

et par suite

$$d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 = \frac{1}{r^2}(\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2) - \frac{dr^2}{r^2} \cdot$$

Le premier membre est le ds^2 d'une sphère de rayon égal à l'unité. Il suffira donc d'exprimer que la surface pour laquelle la formule

$$ds^2 = \frac{1}{r^2}(\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2) - \frac{dr^2}{r^2}$$

donne la distance de deux points infiniment voisins a une courbure constante et égale à l'unité, et l'on aura ainsi l'équation différentielle à laquelle satisfait r. Cette équation est du second ordre.

Note II.

Sur une démonstration analytique des théorèmes de Poncelet, et sur un nouveau système de coordonnées dans le plan.

La démonstration des théorèmes de Poncelet donnée à l'article 38 m'a paru mériter d'être développée, parce qu'elle conduit, sans l'emploi des fonctions elliptiques et au moyen d'une transformation analytique des plus simples, à la proposition fondamentale de Poncelet : *Quand un polygone est à la fois inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique, il existe une infinité de polygones jouissant des mêmes propriétés.* Depuis, en examinant la méthode employée, j'ai reconnu qu'elle pouvait être présentée d'une manière plus simple et plus directe, et qu'elle conduisait à des théorèmes ayant la plus grande analogie avec ceux de Poncelet et devant être considérés comme des généralisations des propositions de l'illustre géomètre. Quelques-uns des théorèmes contenus dans cette Note ont été déjà énoncés dans un travail *sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre,* inséré au tome I du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* M. Em. Weyr, dans un article inséré au *Journal de Borchardt,* avait aussi rencontré, en étudiant les involutions sur les coniques, des propositions générales relatives à des courbes de degré supérieur, qui sont, au fond, équivalentes à l'un des théorèmes métriques de notre *troisième partie,* et que nous démontrons d'une manière directe dans la Note actuelle.

I.

Considérons une section conique (K), tracée dans le plan, et supposons qu'on obtienne toutes les tangentes à cette conique, en faisant varier le paramètre m dans l'équation

$$\alpha m^2 + \beta m + \gamma = 0 , \tag{1}$$

où α, β, γ désignent des coordonnées trilinéaires ou, si l'on veut, des fonctions linéaires des coordonnées ordinaires du point. L'équation de la conique (K) sera en conséquence

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0\ . \tag{2}$$

Si la tangente à cette conique doit passer par un point $(\alpha', \beta', \gamma')$, m sera déterminé par l'équation

$$\alpha' m^2 + \beta' m + \gamma' = 0\ .$$

Désignons par ρ, ρ_1 les racines de cette équation, on aura

$$\alpha' = \frac{-\beta'}{\rho + \rho_1} = \frac{\gamma'}{\rho\rho_1}\ , \tag{3}$$

et nous pourrons regarder le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ comme déterminé par les deux quantités ρ, ρ_1, qui seront alors des coordonnées, d'une nature spéciale, du point. Quand ρ, ρ_1 seront connus, les formules (3) détermineront α', β', γ'. On voit que, dans le nouveau système de coordonnées, un point est défini par l'intersection de deux tangentes à la conique (K), et quoique les formules (3) nous permettent de passer très simplement des coordonnées ρ, ρ_1 aux coordonnées ordinaires, nous allons voir que l'emploi des nouvelles coordonnées variables peut être utile dans un grand nombre de questions.

Dans le nouveau système, l'équation de la conique (K) de base prend la forme

$$(\rho - \rho_1)^2 = 0\ ; \tag{4}$$

son premier membre devient un carré parfait. Cette propriété permet de décomposer les équations de certaines courbes.

Par exemple, toute conique doublement tangente à la courbe de base (K) a une équation de la forme

$$K = P^2$$

Dans le nouveau système, cette équation deviendra

$$d^2(\rho - \rho_1)^2 = [a\rho\rho_1 + b(\rho + \rho_1) + c]^2\ ,$$

a, b, c, d désignant quatre constantes; ou, en extrayant la racine carrée,

$$d(\rho - \rho_1) = a\rho\rho_1 + b(\rho + \rho_1) + c,$$

équation de la forme

$$A\rho\rho_1 + B\rho + C\rho_1 + D = 0.$$

Ainsi, une équation de cette forme représente une conique doublement tangente à la conique (K), et cette conique se réduit à une droite, si $B = C$.

II.

Cela posé, soit une courbe déterminée par une équation algébrique en ρ, ρ_1,

$$f(\rho, \rho_1) = 0, \tag{5}$$

et proposons-nous de déterminer le degré de cette courbe. Il y a deux cas à distinguer, suivant que l'équation est ou n'est pas symétrique par rapport à ρ et à ρ_1.

Supposons d'abord qu'elle ne soit pas symétrique, et qu'elle soit du degré m en ρ et m_1 en ρ_1. Pour trouver l'ordre du lieu qu'elle représente, nous allons chercher le nombre de points de ce lieu situés sur une tangente quelconque à la conique (K). Or, une telle tangente est définie par l'une ou l'autre des équations

$$\rho = a \quad , \quad \rho_1 = a.$$

A l'hypothèse $\rho = a$ correspondent m_1 valeurs de ρ_1, et par suite m_1 points; à la valeur $\rho_1 = a$ correspondent de même m points. On a donc en tout $m + m_1$ points de la courbe sur la tangente, et par suite la courbe est du degré $m + m_1$.

Si, au contraire, l'équation de la courbe est symétrique, elle est nécessairement du même degré m en ρ et en ρ_1. Les deux hypothèses $\rho = a$, $\rho_1 = a$ donnent les mêmes points; la courbe est seulement du degré m.

J'omets un cas intermédiaire, où le premier membre de l'équation (5) serait décomposable en facteurs, les uns symétriques, les autres non symétriques en ρ, ρ_1, et que nous n'aurons pas à considérer.

Réciproquement toute courbe de degré m est représentée par l'équation la plus générale, symétrique en ρ, ρ_1, et du degré m par rapport à chacune des variables. C'est ce qui résulte des formules (3), et aussi d'un calcul relatif au nombre des coefficients arbitraires. Car on reconnaît que l'équation symétrique la plus générale du degré m en ρ contient $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ arbitraires.

Nous pouvons, à l'aide de ces seules remarques, démontrer plusieurs théorèmes généraux sur les polygones inscrits et circonscrits.

III.

Soit d'abord une courbe d'ordre n, passant par l'intersection de deux faisceaux de n droites $A_1, A_2, \ldots, A_n$; B_1, $B_2, \ldots, B_n$. Son équation générale sera de la forme

$$A_1 A_2 \ldots A_n = k \,.\, B_1 B_2 \ldots B_n \,. \tag{6}$$

Supposons maintenant que les droites A_i, B_i soient toutes tangentes à la conique (K) ; on pourra poser

$$\left\{\begin{aligned} A_i &= \alpha a_i^2 + \beta a_i + \gamma = \alpha (a_i - \rho)(a_i - \rho_1), \\ B_i &= \alpha b_i^2 + \beta b_i + \gamma = \alpha (b_i - \rho)(b_i - \rho_1), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et, en adoptant les notations suivantes,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\rho) &= (\rho - a_1)(\rho - a_2) \ldots (\rho - a_n), \\ \psi(\rho) &= \sqrt{k}\,(\rho - b_1)(\rho - b_2) \ldots (\rho - b_n), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

l'équation de la courbe prendra la forme

$$\varphi(\rho)\,\varphi(\rho_1) = \psi(\rho)\,\psi(\rho_1),$$

ou

$$\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)} = \frac{\psi(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)} \tag{9}$$

Dans cette équation, les variables sont séparées, et, en raisonnant comme à l'article 27, on reconnaîtra qu'on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\Phi(\rho)}{\Psi(\rho)} = \frac{\Psi(\rho_1)}{\Phi(\rho_1)} \tag{10}$$

où l'on a

$$\Phi(u) = m\varphi(u) + n\psi(u),$$
$$\Psi(u) = m\psi(u) + n\varphi(u).$$

La nouvelle équation (10) contient une arbitraire nouvelle, à laquelle on peut donner toutes les valeurs possibles. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une courbe d'ordre n passe par les n^2 points d'intersection de deux faisceaux de n tangentes à la conique (K), *elle contient une infinité d'autres systèmes de n^2 points formant les intersections de deux faisceaux de n tangentes à la conique* (K).

Par exemple, si une conique contient les quatre sommets d'un quadrilatère circonscrit à une autre conique, elle contient aussi les sommets d'une infinité d'autres quadrilatères circonscrits. Mais nous n'insistons pas sur ces cas particuliers, et nous allons démontrer un deuxième théorème général.

IV.

Considérons les courbes d'ordre n passant par *tous* les points d'intersection de $n+1$ tangentes $A, A_1, \dots, A_n$ à la conique (K). L'équation de ces courbes peut s'écrire

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \dots + \frac{a_n}{A_n} = 0, \tag{11}$$

où $a, a_1, \dots a_n$ désignent n constantes arbitraires.

Mais, les droites A_i étant des tangentes à la conique (K), on aura

$$A_i = \alpha(b_i - \rho)(b_i - \rho_1),$$

et l'équation (11) pourra s'écrire

(12) $$\sum \frac{a_i}{(b_i - \rho)(b_i - \rho_1)} = 0,$$

ou, en multipliant par $\rho - \rho_1$,

(13) $$\sum \frac{a_i}{b_i - \rho} = \sum \frac{a_i}{b_i - \rho_1},$$

équation qui est de la forme

(14) $$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)},$$

$f(\rho)$ étant un polygone de degré inférieur à celui de $\omega(\rho)$.

Réciproquement, toute équation de la forme précédente pourra être ramenée à la forme (12), et elle représentera une courbe d'ordre n, contenant tous les sommets du polygone circonscrit à la conique (K), et dont les côtés sont définis par l'équation

$$\varphi(\rho) = 0.$$

Mais l'équation (14) peut être écrite

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho) + kf(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1) + kf(\rho_1)},$$

et, cette nouvelle équation étant de même forme que la précédente, la courbe sera circonscrite au polygone dont l'équation est

$$\varphi(\rho) + kf(\rho) = 0.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand une courbe d'ordre n contient tous les sommets d'un polygone de $n+1$ côtés, tous tangents à une conique, elle est circonscrite de la même manière à une infinité d'autres polygones de $n+1$ côtés, formés avec d'autres tangentes à la même conique.

Par exemple, quand une courbe du 4ᵉ ordre contient tous les sommets d'un pentagone, comme un pentagone est toujours circonscrit à une conique, elle contient aussi tous les sommets d'une infinité d'autres pentagones, tous circonscrits à une même conique. D'où il suit, comme l'a fait remarquer M. Lüroth (*Mathematische Annalen*, t. I), qu'étant donnée une courbe du 4ᵉ ordre, on ne peut en général lui inscrire un pentagone dont elle contienne tous les sommets.

La proposition précédente peut être complétée, et nous allons démontrer qu'*étant donnés deux polygones, l'un de m, l'un de n côtés* ($n = m$ ou $< m$), *circonscrits à une même conique, on peut toujours par leurs* $\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ *sommets faire passer au moins une courbe de degré* $m-1$, *qui sera circonscrite de la même manière à une infinité d'autres polygones de m côtés circonscrits à la conique.*

En effet, soient

$$f(\rho) = 0 \quad , \quad \varphi(\rho) = 0$$

les équations de degrés m, n, qui définissent les côtés de ces deux polygones, et soit $\psi(\rho)$ un polynôme quelconque de degré $m-n$. L'équation

$$(16) \qquad f(\rho)\varphi(\rho_1)\psi(\rho_1) - f(\rho_1)\varphi(\rho)\psi(\rho) = 0$$

définira une courbe satisfaisant aux conditions indiquées, dont l'équation se ramènera à la forme (14), et contiendra $m-n$ paramètres arbitraires. La proposition est donc démontrée.

Par exemple, étant donnés deux triangles quelconques circonscrits à une conique, on peut, par leurs 6 sommets, faire passer une conique qui contiendra les sommets d'une infinité d'autres triangles circonscrits à la même conique que les deux premiers.

Étant donnés un triangle et un quadrilatère circonscrits à une conique, on peut par leurs 9 sommets faire passer une infinité de courbes du 3ᵉ ordre, circonscrites à une infinité d'autres quadrilatères circonscrits à la même conique, etc.

V.

Les théorèmes de Poncelet sont, dans toute leur généralité, une conséquence directe des propositions précédentes. Car supposons qu'une conique (C) contienne les $n+1$ sommets d'un polygone de $n+1$ côtés, circonscrit à la conique (K), et formé des droites $A, A_1, \ldots, A_n$. Alors on pourra disposer des constantes contenues dans l'équation

$$(17) \qquad \frac{a}{A} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0,$$

de telle manière que la courbe représentée par cette équation ait n points nouveaux sur la conique (C); et, comme elle contient aussi les $n+1$ sommets du polygone situés sur la conique (C), cette courbe du degré n aura en tout $2n+1$ points communs avec la conique (C), et par conséquent la contiendra tout entière. Ainsi, avec des valeurs convenables des constantes a_i, l'équation (17) représente une courbe formée de la conique (C) et d'une autre courbe (C′) de degré $n-2$. Cette courbe composée (CC′) contient d'ailleurs, d'après ce qui précède, les sommets d'une suite continue de polygones tous circonscrits à la conique (K). Par conséquent, la conique (C) sera circonscrite à chacun de ces polygones; elle contiendra sur chaque côté deux sommets de ce polygone. Les théorèmes de Poncelet se trouvent ainsi démontrés.

Quant à la courbe (C′), on démontrera de la manière suivante qu'elle se compose de coniques (et d'une droite dans le cas des polygones d'un nombre pair de côtés).

L'équation particulière de la conique (C) étant de la forme

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} A(\rho^2+\rho_1^2) + B\rho\rho_1 + C\rho\rho_1(\rho+\rho_1) + D(\rho+\rho_1) \\ + E\rho^2\rho_1^2 + F = 0, \end{aligned} \right.$$

une tangente $\rho = a$ la coupera en deux points, déterminés par les valeurs ρ', ρ'' de ρ. Ces deux valeurs sont les coordonnées d'un autre sommet du polygone, et comme il y a entre ces

deux racines une relation de même forme que l'équation (18), le nouveau sommet décrira aussi une conique.

En continuant ce raisonnement de proche en proche, on verra que tous les sommets décrivent des coniques, et que la courbe (C′) se décompose en coniques. La théorie des équations déduirait, au reste, ce résultat très simplement du fait que l'équation (14), dans le cas qui nous occupe, admet un facteur de la forme (18).

VI.

Avant de continuer ces recherches, je reviens sur un point de l'article précédent, qui est susceptible d'être présenté avec une plus grande simplicité. On peut démontrer d'une manière directe et élémentaire le théorème suivant :

Étant donné un polygone formé de $n+1$ droites A, A_1, ..., A_n, et inscrit dans une section conique (C), *pour tout point de la conique, il y aura entre les polynômes A, A_1, ..., A_n, qui, égalés à zéro, représentent les côtés désignés par les mêmes lettres, une relation de la forme*

$$\frac{a}{A}+\frac{a_1}{A_1}+\ldots+\frac{a_n}{A_n}=0. \tag{19}$$

D'abord, le théorème est connu pour un triangle. On sait que l'équation de la conique (C), circonscrite à ce triangle, est de la forme

$$\frac{a}{A}+\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}=0.$$

Considérons maintenant un quadrilatère $AA_1A_2A_3$, et soit B une diagonale de ce quadrilatère. La conique (C), étant circonscrite à la fois aux deux triangles AA_1B, BA_2A_3 sera représentée par deux équations de la forme :

$$\frac{a}{A}+\frac{a_1}{A_1}+\frac{b}{B}=0, \quad \frac{a_2}{A_2}+\frac{a_3}{A_3}-\frac{b}{B}=0;$$

et, en ajoutant, on voit que l'équation

$$\frac{a}{A} + \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} = 0$$

conviendra à tous les points de la conique (C).

En passant au pentagone, à l'hexagone, etc., et en raisonnant de la même manière, on établirait pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, $n+1$, l'équation citée plus haut,

$$\frac{a}{A} + \ldots + \frac{a_n}{A_n} = 0.$$

C'est la proposition que nous avions établie d'une manière moins élémentaire dans l'article précédent.

VII.

On voit avec quelle simplicité le système de coordonnées employé met en évidence les théorèmes de Poncelet, et même des propositions plus étendues. Nous devons maintenant exposer d'autres remarques, qui nous conduiront à des théorèmes analogues, relatifs surtout aux courbes de degré supérieur.

Un des caractères distinctifs du système actuel de coordonnées consiste en ce que les deux variables au moyen desquelles nous déterminons la position d'un point ne sont pas, en quelque sorte, séparées l'une de l'autre. On ne peut pas les distinguer, comme dans d'autres systèmes de coordonnées; elles sont plus que symétriques, liées, conjuguées l'une à l'autre. D'après cela, l'équation

$$f(\lambda, \rho) = 0, \tag{20}$$

où λ désigne un paramètre variable, fera connaître pour chaque valeur de λ un certain nombre n de valeurs de ρ. Ces n valeurs de ρ déterminent n tangentes à la conique (K). La

courbe décrite par les points d'intersection de ces tangentes, quand on fait varier λ, aura pour équation le résultat de l'élimination de λ entre les deux équations

$$(21) \qquad f(\lambda, \rho) = 0, \quad f(\lambda, \rho_1) = 0.$$

Mais on peut retenir l'équation (20), qui détermine aussi bien les propriétés de la courbe. On voit qu'à chaque valeur de λ correspondra un polygone de n côtés, qui se déplacera en demeurant circonscrit à la conique, ses sommets décrivant la courbe considérée. Cherchons l'ordre de cette courbe.

Supposons que l'équation (20) soit du degré m en λ, et du degré n en ρ. A une valeur a de ρ correspondront m valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de λ; à chacune de ces valeurs correspondront $n-1$ nouvelles valeurs de ρ, c'est-à-dire que la droite $\rho = a$ coupera la courbe en $m(n-1)$ points. Ce dernier nombre est donc l'ordre de la courbe correspondante à l'équation (20).

Si m est égal à 1, l'équation est de la forme

$$f(\rho) + \lambda\varphi(\rho) = 0,$$

et, en éliminant λ entre les deux équations (21), on trouve

$$f(\rho)\varphi(\rho_1) - f(\rho_1)\varphi(\rho) = 0.$$

Ce sont les équations considérées en premier lieu. Nous allons examiner d'autres hypothèses.

VIII.

Si $n = 2$, l'équation (20) est de la forme

$$(22) \qquad A\rho^2 + B\rho + C = U = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions de λ.

A chaque valeur de λ correspondent deux valeurs de ρ, et un seul point par conséquent de la courbe (U), par les formules

$$(23) \qquad \frac{\alpha}{} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}.$$

La courbe (U) est donc unicursale; mais la forme précédente d'équation offre l'avantage de conduire presque sans effort à un théorème signalé rapidement par Jacobi dans une lettre à M. Hermite, et qui se rapporte à l'introduction des fonctions ultra-elliptiques dans cette théorie.

C'est un théorème bien connu d'analyse, que, si dans l'équation (22), contenant une des deux variables ρ au second degré, et l'autre λ au degré m, on donne à ρ une valeur quelconque, à cette valeur de ρ correspondent m valeurs, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de λ, telles que la somme des intégrales

$$(24) \qquad \int \frac{\varpi(\lambda_i)\, d\lambda_i}{\sqrt{B_i^2 - 4A_iC_i}}$$

[où A_i, B_i, C_i désignent ce que deviennent A, B, C, quand on substitue λ_i à la place de λ, et où $\varpi(\lambda)$ est un polynôme d'un degré inférieur à $m-1$], étendue à toutes les racines, soit constante, quelle que soit la valeur donnée à la variable ρ.

En appliquant ce théorème à la question de géométrie que nous avons à étudier, nous voyons que,

Si l'on coupe la courbe unicursale (U) *d'ordre n par les tangentes à une conique quelconque* (K), *la somme des intégrales ultra-elliptiques* (24), *correspondantes aux n points d'intersection de la tangente et de la courbe* (U), *demeure constante quand la tangente se déplace.*

Si les fonctions A, B, C sont du second degré, la courbe (U) sera une conique. La somme des deux intégrales elliptiques, correspondantes aux points où elle est rencontrée par une tangente à la conique (K), demeurera constante. C'est le point de départ de Jacobi dans son Mémoire sur les cercles. Nous ne poursuivrons pas ce mode de démonstration.

IX.

Supposons maintenant que l'équation (20) soit du second

degré en λ, et d'un degré quelconque n en ρ. On pourra l'écrire sous la forme

$$(25) \qquad V = A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0\,,$$

où A, B, C désignent des polynômes du degré n en ρ. Cette équation convient, d'après les remarques faites plus haut, à une courbe (V) de degré $2(n-1)$, et l'on reconnaîtra que, dans le cas général, cette courbe a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles à l'intersection des trois courbes, d'ordre $n-1$,

$$0 = \frac{AB_1 - BA_1}{\rho - \rho_1} = \frac{AC_1 - CA_1}{\rho - \rho_1} = \frac{BC_1 - CB_1}{\rho - \rho_1}\,.$$

[Dans ces équations A_1, B_1, C_1 désignent ce que deviennent A, B, C, quand on y substitue ρ_1 à ρ.] La courbe (V) est d'ailleurs circonscrite à une suite de polygones de n côtés, dont elle contient tous les sommets, et qui sont circonscrits à la conique (K). Les côtés de ces polygones sont déterminés par les n valeurs de ρ qu'on déduit de l'équation (27) pour chaque valeur de λ. D'ailleurs, ces valeurs de ρ satisfont, d'après le théorème de Jacobi rappelé plus haut, aux $n-1$ équations

$$(26) \qquad \int \frac{\varpi(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1C_1}} + \ldots + \int \frac{\varpi(\rho_n)\,d\rho_n}{\sqrt{B_n^2 - A_nC_n}} = \text{const.}\,,$$

où l'on prend pour $\varpi(\rho)$ successivement $1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-2}$. Ces dernières équations (26), si on les différentie, ne sont autres que les équations abéliennes considérées si souvent par Jacobi et par M. Liouville. D'ailleurs les valeurs de ρ, racines de l'équation

$$B^2 - AC = 0\,,$$

déterminent $2n$ tangentes à la conique (K), qui sont aussi tangentes à la courbe (V), chacune en $n-1$ points.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion que, dans notre système de coordonnées, *les équations différentielles ultra-elliptiques* (26) *sont intégrées par des courbes de l'ordre* $2(n-1)$,

tangentes à $2n$ tangentes fixes de la conique (K), *et à chacune en $n-1$ points.*

Par exemple, pour $n=2$, les équations (26) se réduisent à une seule,

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1C_1}} + \frac{d\rho_2}{\sqrt{B_2^2 - A_2C_2}} = 0\,. \tag{27}$$

C'est l'équation d'Euler, relative aux fonctions elliptiques. On voit qu'elle est intégrée par toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à (K). L'équation de ce quadrilatère est

$$B^2 - AC = 0\,. \tag{28}$$

Pour $n=3$, on a la première classe des fonctions ultra-elliptiques. Les équations (26) sont au nombre de deux; les courbes intégrant les deux équations différentielles sont des courbes du 4ᵉ ordre, à 1 point double, admettant pour tangentes doubles les 6 côtés fixes d'un hexagone circonscrit à la conique (K), etc.

On obtient d'ailleurs sans difficulté, dans tous les cas, l'équation des courbes (V), c'est-à-dire la relation entre ρ, ρ_1, convenant à tous les points de ces courbes. Il suffira d'exprimer que les deux équations en λ,

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0\,, \qquad A_1\lambda^2 + 2B_1\lambda + C_1 = 0\,,$$

ont une racine commune, ce qui donne

$$(AC_1 - CA_1)^2 = 4(AB_1 - BA_1)(BC_1 - CB_1)\,.$$

Cette forme met en évidence le facteur à supprimer $(\rho - \rho_1)^2$, qui, égalé à zéro, donne la conique de base (K). La suivante,

$$(2BB_1 - AC_1 - CA_1)^2 - 4(B^2 - AC)(B_1^2 - A_1C_1) = 0\,,$$

conduit à un théorème intéressant.

La courbe d'ordre n, définie par l'équation

$$2BB_1 - AC_1 - CA_1 = 0\,,$$

passe par les $2n^2$ points de contact des $2n$ tangentes multi-

ples avec la courbe (V) et avec la conique (K). Par exemple, pour $n=2$, on a la conique qui contient les 8 points de contact des coniques (K) et (V) avec leur quadrilatère circonscrit commun.

X.

Examinons d'une manière un peu plus détaillée les courbes du 4e ordre à 1 point double (V_4), que nous venons de rencontrer pour $n=3$, et qui ont fait l'objet des recherches récentes de MM. Brioschi et Cremona.

Nous voyons qu'elles sont circonscrites à une suite continue de triangles, dont les côtés sont tangents à la conique (K). Car, l'équation

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0 \tag{29}$$

étant ici du 3e ordre en ρ, à chaque valeur de λ correspondent trois valeurs de ρ, et par conséquent trois tangentes à la conique (K). Ces tangentes forment un triangle dont les sommets décrivent la courbe (V_4). Mais on doit se demander si ce mode de génération donne la courbe la plus générale du 4e ordre à 1 point double, et la réponse est affirmative.

Considérons d'abord une courbe générale du 4e ordre. On sait, depuis les belles recherches de Hesse, de Steiner, etc., que cette courbe peut être engendrée, et de plusieurs manières, comme enveloppe d'une suite de sections coniques, représentées par une équation de la forme

$$H + Dm + Em^2 = 0\,, \tag{30}$$

où m est un paramètre variable, et H, D, E des polynômes du second degré par rapport aux coordonnées ordinaires. Ces coniques sont telles qu'il en passe deux par un point quelconque du plan. Chacune est tangente à la courbe enveloppe du 4e ordre en 4 points α_1, α_2, α_3, α_4, variables avec m.

Mais il est clair que toutes les coniques représentées par

l'équation (30) font partie du réseau déterminé par trois d'entre elles, et par conséquent que les cordes de ces coniques $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, ... enveloppent la courbe, en général du 6e ordre et de la 3e classe, qu'on appelle la *cayleyenne* du réseau. Ainsi toutes les tangentes à la cayleyenne coupent la courbe du 4e ordre en quatre points, qui se déterminent par groupes de deux. Cette remarque établit une correspondance digne d'étude entre une courbe de 3e classe, la cayleyenne, et la courbe du 4e ordre.

Dans le cas où la courbe du 4e ordre a un ou plusieurs points doubles, il y a toujours un système au moins de coniques inscrites dans la courbe et contenant toutes un seul des points doubles, que nous appellerons α. Ces coniques déterminent un réseau, et, comme elles passent par un point fixe, la cayleyenne se réduit à une conique (K). Alors chaque conique est tangente à l'enveloppe en trois points seulement α_1, α_2, α_3, et les droites qui joignent ces trois points enveloppent la conique (K). C'est le mode de génération qu'il s'agissait de retrouver.

Nous pouvons d'ailleurs exprimer les coordonnées ordinaires d'un point de la courbe (V_4) en fonction d'une arbitraire, de la manière suivante.

Donnons-nous une des racines $\rho = u$ de l'équation (29). En résolvant cette équation par rapport à λ, λ sera exprimé par une fonction de u, contenant la racine carrée d'un polynôme du 6e degré en u. Mais, si l'on considère λ comme connu, l'équation du 3e ordre en ρ aura trois racines u, ρ, ρ_1. Supprimant la racine u, $\rho\rho_1$ et $\rho + \rho_1$ seront donnés en fonction rationnelle de u et de λ, ou, si l'on veut, en fonction de u et d'un radical carré du 6e degré en u. Or, une fois connus $\rho\rho_1$, $\rho + \rho_1$, on a, par les formules (3), les coordonnées ordinaires d'un point de la courbe.

XI.

Le système de coordonnées examiné ici se prête d'une manière très simple à la résolution de toutes les questions concernant les polygones circonscrits aux coniques. En voici un nouvel exemple.

Supposons qu'on se propose, étant données deux courbes (W), (W_1), de trouver le lieu décrit par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à la conique (K), et dont deux sommets décrivent les courbes (W), (W_1).

Soient

$$W = f(\rho, \rho_1) = 0, \quad W_1 = \varphi(\rho, \rho_1) = 0$$

les équations des deux courbes, et considérons le triangle circonscrit ABC dans une de ses positions. Les coordonnées des trois sommets seront, par exemple,

pour A, ... ρ_1, ρ_2;
pour B, ... ρ, ρ_2;
pour C, ... ρ, ρ_1.

Alors, si le point A décrit la courbe (W), on devra avoir

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \text{ou} \quad f(\rho_2, \rho_1) = 0.$$

De même, si B décrit (W_1),

$$\varphi(\rho, \rho_2) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(\rho_2, \rho) = 0.$$

Pour avoir le lieu décrit par le troisième sommet, il faudra donc éliminer ρ_2 entre les deux équations

$$(31) \qquad f(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi(\rho, \rho_2) = 0,$$

ou entre les deux suivantes,

$$(31') \qquad f(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi(\rho_2, \rho) = 0.$$

Ce second système est identique au premier, si les équations sont symétriques. Dans tous les cas, la question est, on le voit, ramenée à une simple élimination.

Par exemple, supposons que (W), (W_1) soient des droites ou des coniques doublement tangentes à (K). On aura à éliminer ρ_2 entre deux équations

$$A \rho_1\rho_2 + B \rho_1 + C \rho_2 + D = 0 ,$$
$$A'\rho \rho_2 + B'\rho + C'\rho_2 + D' = 0 ,$$

ce qui conduit évidemment à une relation de même forme entre ρ et ρ_1.

Nous obtenons, par suite, le théorème bien connu suivant :

Si un triangle est circonscrit à une conique (K), *et que deux de ses sommets décrivent des droites ou des coniques doublement tangentes à la proposée, le troisième décrira aussi une conique doublement tangente à la proposée* (K).

Supposons maintenant que les deux courbes (W), (W_1) soient deux coniques, inscrites dans un même quadrilatère circonscrit à (K). Nous avons trouvé l'équation de ces coniques (27). En intégrant cette équation, on voit qu'ici le système (31) sera de la forme

$$F(\rho_1) - F(\rho_2) = \alpha , \quad -F(\rho_2) + F(\rho) = \beta .$$

En éliminant ρ_2, nous trouvons l'équation

$$F(\rho_1) - F(\rho) = \alpha - \beta ,$$

qui représente une conique inscrite dans le même quadrilatère que les trois premières. C'est le théorème de Poncelet sous sa forme la plus complète, et la méthode suivie s'étend, on le voit, à d'autres questions.

Au moyen des remarques précédentes, nous pouvons aussi interpréter toute substitution faite sur l'une des variables. Soit

$$V = \varphi(\rho , \rho_1) = 0$$

l'équation d'une ceurbe (V). Si l'on substitue à ρ_1 la variable ρ_2, liée à la première par l'équation

$$U = f(\rho_1 , \rho_2) = 0 ,$$

le résultat de la substitution définit une courbe nouvelle (V'),

et il est clair que (V′) est le lieu décrit par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à (K), et dont deux sommets décriraient les courbes (V), (U); ou plutôt, c'est, d'après ce qui précède, une des deux courbes dont se compose le lieu complet.

On verra ainsi que toute courbe du 4e ordre à deux points doubles peut être considérée, et d'une infinité de manières, comme le lieu décrit par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique (K), dont un sommet décrit une conique quelconque, et l'autre une conique doublement tangente à (K). J'indique seulement ce mode de génération, dont la démonstration exige quelques développements, qui sont donnés à la fin de cette note.

XII.

Nous avons vu comment l'équation différentielle d'Euler

$$\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = 0 \tag{32}$$

admet pour intégrales générales les coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à (R) et défini par l'équation

$$f(\rho) = 0 . \tag{33}$$

Si ce quadrilatère a pour deux de ses sommets opposés les points circulaires de l'infini, les coniques intégrales seront homofocales à (K).

On doit à M. Chasles deux beaux théorèmes, qu'on n'a pas encore essayé de démontrer par la considération des fonctions elliptiques. L'un de ces théorèmes peut s'énoncer ainsi :

Étant données deux coniques homofocales (C), (K), si de deux points a, a' de l'une (C) on mène des tangentes à l'autre, on forme un quadrilatère, dont les autres couples de sommets opposés b, b', c, c' sont aussi sur des coniques homofocales

aux proposées. Cette importante proposition se démontre sans difficulté de la manière suivante.

Soit la conique (K) et le quadrilatère défini par l'équation (33). Toutes les coniques inscrites dans ce quadrilatère seront représentées par l'équation

$$(34) \qquad \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = \alpha ,$$

en sorte que, pour deux points (ρ, ρ_1) (ρ', ρ'_1), situés sur une conique, on aura

$$(35) \qquad \int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} = \int \frac{d\rho'}{\sqrt{f(\rho')}} - \int \frac{d\rho'_1}{\sqrt{f(\rho'_1)}} ,$$

ce qu'on peut écrire

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - \int \frac{d\rho'}{\sqrt{f(\rho')}} = \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}} - \int \frac{d\rho'_1}{\sqrt{f(\rho'_1)}} .$$

Cette dernière équation exprime le théorème qu'il s'agissait de démontrer. Elle signifie que la conique qui passe par le point (ρ, ρ') et qui est inscrite dans le même quadrilatère que les premières, passe aussi par le point (ρ_1, ρ_1'). Or ces deux points sont deux sommets opposés du quadrilatère formé par les quatre tangentes ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1; ce qui démontre la proposition indiquée.

On peut aussi faire intervenir le théorème d'Abel de la manière suivante.

En vertu de l'équation (35), on devra avoir l'identité

$$(36) \qquad (Ax^2 + Bx + C)^2 - f(x) = D(x-\rho)(x-\rho_1)(x-\rho')(x-\rho'_1),$$

et la symétrie de cette identité prouve immédiatement le théorème. Mais nous allons déduire de l'identité (36) la démonstration d'un autre théorème de M. Chasles.

Posons

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-a')(x-b'),$$

$$\varpi(x) = D(x-\rho)(x-\rho')(x-\rho_1)(x-\rho'_1).$$

L'identité (36) pourra s'écrire

$$(37)\quad (Ax^2+Bx+C)^2-\varpi(x)=(x-a)(x-b)(x-a')(x-b'),$$

et cette identité, toute semblable à la précédente, exprime que, dans le quadrilatère

$$\varpi(x)=0,$$

on peut inscrire une conique passant par deux sommets opposés (a, b), (a', b') par exemple, du quadrilatère primitif

$$f(x)=0;$$

d'où le théorème suivant :

Étant données deux coniques (C), (K), si de deux points de (C) on mène des tangentes à la conique (K), elles forment un quadrilatère dans lequel on peut inscrire une conique passant par deux quelconques des sommets opposés du quadrilatère $\boxed{(C)(K)}$.

En transformant par l'homographie, on a le théorème de M. Chasles :

Étant données deux coniques homofocales, si de deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, on forme un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

On sait que cette proposition comprend comme cas particulier les propriétés métriques focales.

Les théorèmes de géométrie que nous venons de démontrer s'étendent aux courbes plus générales que nous avons examinées, et qui correspondent aux équations abéliennes. On pourra consulter à ce sujet l'article présenté à la Société Philomathique (séances du 25 mai et du 8 juin 1872).

XIII.

Le système de coordonnées précédent trouve une application intéressante dans l'étude de quelques courbes, et, en particulier, de celles du quatrième ordre à deux points doubles.

Supposons qu'on ait à examiner une équation non symétrique en ρ, ρ_1. Une telle équation pourra toujours se mettre sous la forme

$$(38) \qquad f(\rho, \rho_1) + (\rho - \rho_1)\varpi(\rho, \rho_1) = 0,$$

où f et ϖ sont des fonctions symétriques. Elles s'expriment donc en fonction rationnelle des coordonnées ordinaires, tandis que $\rho - \rho_1$ est la racine carrée du premier membre de l'équation de la conique (K). En élevant au carré pour rendre l'équation rationnelle, nous aurons l'équation

$$(39) \qquad f^2 - (\rho - \rho_1)^2\varpi^2 = 0,$$

ou

$$(40) \qquad P^2 - KQ^2 = 0.$$

La courbe qu'elle représente est tangente à la conique (K) en tous les points où elle la rencontre. Elle a des points doubles à l'intersection des courbes P et Q.

Par exemple, si l'équation (39) est du second degré en ρ et en ρ_1, mais non symétrique, elle représentera une courbe du 4e ordre ayant deux points doubles à l'intersection de la conique $P = 0$ et de la droite $Q = 0$, et cette courbe du 4e ordre sera tangente en quatre points à la conique (K).

Réciproquement, toute courbe du quatrième ordre à deux points doubles peut être représentée, et d'une infinité de manières, par une équation de la forme (38). Car il y a une série de coniques inscrites dans la courbe, et ne passant par aucun des points doubles; soit (K) l'une quelconque de ces coniques. L'équation de la courbe du 4e ordre pourra se mettre sous la forme (40) et par suite sous la forme équivalente (38). Ainsi, il suffit de prendre pour conique de base de notre système une quelconque des coniques tangentes à la courbe en quatre points.

Nous rencontrons ici un fait intéressant dans la théorie des courbes du 4e ordre à deux points doubles, et ce fait

se rattache aux différents modes de génération qu'on a proposés pour les décrire. On sait (en supposant que les deux points doubles soient les points à l'infini sur le cercle) qu'elles sont anallagmatiques par rapport à quatre pôles différents. Par suite, ***pour toute droite passant par chacun de ces pôles, l'équation du 4e ordre qui détermine les points d'intersection de la droite et de la courbe se résout par des extractions de racines carrées.***

C'est là un fait analytique remarquable en lui-même. Les recherches précédentes lui donnent une réelle extension ; car elles démontrent que la même propriété appartient aussi aux droites tangentes à l'une quelconque des coniques inscrites dans la courbe du 4e ordre.

Soit, en effet,

$$f(\rho, \rho_1) = 0$$

l'équation de la courbe, du second degré, mais non symétrique en ρ, ρ_1.

Une tangente quelconque à la conique (K) sera définie par l'une des équations

$$\rho = a, \qquad \rho_1 = a.$$

En prenant successivement $\rho = a$, $\rho_1 = a$, on aura à résoudre deux équations du second degré, qui donneront chacune deux des quatre points d'intersection de la droite et de la courbe.

Ainsi, étant donnée une courbe du 4e ordre à deux points doubles et une conique inscrite (K), toutes les tangentes à cette conique couperont la courbe en quatre points, se déterminant par des extractions de racines carrées. Quand la conique (K) se réduit à deux droites, ses tangentes viennent passer par le point de rencontre de ces droites, et l'on obtient le mode de génération dû à MM. Salmon et Moutard.

Il suit de là que, étant donnée une droite quelconque dans le plan de la courbe, l'équation du 3e degré qui détermine les trois coniques (K), inscrites dans la courbe et tangentes à la droite, est la résolvante de l'équation du 4e degré, faisant

connaître les points d'intersection de la droite et de la courbe. (Voir l'article 41 pour des remarques analogues relatives aux cyclides.)

Enfin, on peut déduire des remarques qui précèdent un mode de génération des courbes étudiées ici.

Si l'on fait correspondre anharmoniquement les cercles passant par deux points a, a' aux tangentes d'une conique (K), les intersections des cercles avec les tangentes correspondantes décrivent en général une courbe du 5[e] ordre. Mais, si la droite aa' est tangente à la conique (K), et, en outre, si la droite aa'', considérée comme tangente, correspond au cercle de rayon infini passant par a, a', la courbe du 5[e] ordre se décompose dans la droite aa' et en une cyclique circonscrite à la conique (K).

En terminant ce qui se rapporte aux courbes du 4[e] ordre, nous allons démontrer le mode de génération de ces courbes indiqué à l'article 12 de cette Note. Soit

$$f(\rho, \rho_1) = 0 \tag{41}$$

l'équation de la courbe proposée. Cette équation n'est pas symétrique, mais on peut la déduire d'une équation symétrique

$$F(\rho, \rho'_1) = 0, \tag{42}$$

par une substitution de la forme

$$A\rho_1\rho'_1 + B\rho_1 + C\rho'_1 + D = 0. \tag{43}$$

Cette substitution analytique, d'après les remarques faites plus haut, nous montre que la courbe est décrite par le sommet libre d'un triangle circonscrit à la conique (K), dont l'un des sommets décrit une conique quelconque (42), et l'autre une conique (43), inscrite à (K). Ainsi,

La courbe du 8[e] ordre décrite par le troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique (K), dont l'un des sommets décrit une conique quelconque (C), l'autre une conique (C') doublement tangente à (K), se compose de deux courbes du

4e ordre à deux points doubles. Réciproquement, toute courbe du 4e ordre à deux points doubles peut être engendrée comme nous venons de l'indiquer.

Notons encore une conséquence de l'équation (41). Si l'on donne à ρ une valeur quelconque, on trouve pour ρ_1 deux valeurs, entre lesquelles il y a une relation symétrique du second degré. Donc,

Étant donnée une courbe du 4e ordre a deux points doubles et une conique (K), inscrite dans la courbe, si des points où une tangente à (K) coupe la courbe on mène de nouvelles tangentes à la conique, ces tangentes forment un quadrilatère dont deux sommets opposés décrivent des coniques.

Note III.

Sur la démonstration directe des théorèmes de géométrie sphérique exposés dans la TROISIÈME PARTIE.

Dans la *Troisième Partie* (art. 33 à 38), nous avons donné quelques propositions de géométrie sphérique, que nous avons déduites des théorèmes analogues déjà démontrés pour les courbes planes (art. 27 à 32). Il ne sera pas inutile de montrer comment l'emploi du système de coordonnées étudié dans la Note précédente peut conduire à une démonstration directe des propositions relatives à la géométrie de la sphère, données dans la *Troisième Partie*. Mais auparavant nous allons exposer quelques remarques relatives à la perspective plane des figures tracées sur la sphère.

I.

Étant donnée une sphère (S) de centre O, projetons ses différents points sur un plan P, par des droites contenant le centre O. Alors à tout point m de la sphère correspondra un seul point M du plan. Mais ce point M aura pour homologues sur la sphère les deux points diamétralement opposés m, m', situés à l'intersection de la sphère (S) et du diamètre OM. On a donc un mode de représentation de la sphère sur un plan qui a été étudié surtout par M. Chasles, et, en dernier lieu, par M. Clebsch. Les points à l'infini de la sphère se projettent suivant ceux d'un cercle (K), intersection du plan de perspective (P) et du cône asymptote de la sphère. Les grands cercles de la sphère se projettent suivant des droites, et les petits cercles suivant des coniques doublement tangentes au cercle (K).

Les génératrices rectilignes de la sphère se projettent suivant les tangentes au cercle (K), et chacune de ces tangentes est la perspective de deux génératrices rectilignes de la sphère (S), qui sont diamétralement opposées et de systèmes différents.

D'après cela, si l'on emploie, pour déterminer les points à la surface de la sphère, le système de coordonnées formé des deux séries de génératrices rectilignes, de telle manière que la première des coordonnées demeure constante pour tous les points d'une génératrice rectiligne de l'un des systèmes, et la seconde pour tous les points d'une génératrice de l'autre système; à ce système de détermination des figures sphériques correspondra, dans le plan qui est la perspective de la sphère, le système de coordonnées qui a été étudié dans la Note précédente, et dans lequel on détermine un point par l'intersection de deux tangentes à la conique (K). Nous allons tout d'abord examiner la liaison entre les deux systèmes de coordonnées.

Soit un point du plan (P), ayant pour coordonnées ρ, ρ_1, définies dans la Note précédente. La tangente T au cercle (K), déterminée par la coordonnée ρ, est la perspective de deux génératrices du premier et du second système de la sphère t, t'. De même la tangente T_1, correspondante à ρ_1, est la projection de deux génératrices rectilignes t_1, t'_1. Donc le point M du plan intersection de T, T_1 est la projection de deux points m, m' de la sphère.

m, intersection de t, t'_1;
m', ... de t', t_1.

Ainsi, notre système de coordonnées symétriques ρ, ρ_1, qui détermine sans ambiguïté un point du plan, ne conserverait pas cette propriété sur la sphère. Pour faire disparaître cette difficulté, nous conviendrons qu'en déterminant le point M par les coordonnées ρ, ρ_1, la tangente définie par la première coordonnée ρ sera toujours la projection d'une génératrice rectiligne du premier système de la sphère; et au contraire, à

la tangente correspondante à ρ_1 on fera correspondre une génératrice rectiligne du second système. Alors à un système (ρ, ρ_1), définissant un seul point M du plan, correspondra aussi un seul point *m* de la sphère. Mais au système (ρ_1, ρ), définissant le même point M du plan, correspondra le point *m'* de la sphère, diamétralement opposé au point M.

Étant donnés deux points A, B de la sphère, définis par les coordonnées $\rho, \rho_1; \rho', \rho'_1$, les points associés A', B' auront pour coordonnées $\rho, \rho'_1; \rho', \rho_1$, et les points diamétralement opposés à ces derniers, $\rho'_1, \rho; \rho_1, \rho'$.

II.

Examinons maintenant les propriétés métriques relatives à ces systèmes de coordonnées. Nous allons rappeler les définitions importantes déjà données d'après M. Cayley (art. 61).

Étant donnés deux points dans le plan et la conique (K), appelons *distance* des deux points M, M' la fonction δ définie par l'équation

$$e^{2i\delta} = R,$$

R étant le rapport anharmonique des points M, M' et de ceux où la droite MM' coupe la conique (K).

De même, étant données deux droites, appelons *angle* de ces deux droites la fonction V, définie par l'équation

$$e^{2iV} = R',$$

R' désignant le rapport anharmonique formé avec les deux droites et les deux tangentes menées de leur point de rencontre à la conique (K).

Ces définitions subsistent quand on soumet la figure entière à une transformation homographique; car on sait que l'homographie ne change pas les rapports anharmoniques. Si l'on soumet, au contraire, la figure à une transformation par

polaires réciproques, les angles se changent en distances, les distances en angles.

Ces définitions étant admises, on reconnaît sans peine que deux points m, n de la sphère se projettent suivant deux points M, N du plan, tels que l'arc mn de la sphère soit égal à la distance MN, prise par rapport au cercle (K) et telle que nous venons de la définir. De même, deux grands cercles de la sphère se projettent suivant deux droites faisant le même angle que les deux grands cercles, pourvu qu'on mesure l'angle des droites par rapport au cercle (K).

Ainsi la géométrie de la sphère est identique à cette géométrie plane, dans laquelle on prend le cercle (K) pour *conique absolue*, suivant la définition de M. Cayley.

Il résulte de là que, dans la suite, nous pourrons considérer à volonté soit les figures planes, soit les figures sphériques comme rapportées à notre système de coordonnées, et nous obtiendrons en même temps les propriétés métriques des figures planes dans la géométrie de M. Cayley, et celles des figures sphériques avec les notions ordinaires d'angles et de distances.

III.

Proposons-nous d'abord de déterminer la distance de deux points M, M′ par rapport à une conique (K). Soit, comme dans la Note précédente,

$$(1) \qquad \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

l'équation de la conique, et α, β, γ, α', β', γ' les coordonnées de M et de M′. Tout point de la droite MM′ aura pour coordonnées $\alpha + \lambda\alpha'$, $\beta + \lambda\beta'$, $\gamma + \lambda\gamma'$, et, en exprimant que ce point satisfait à l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad \lambda^2(\beta'^2 - 4\alpha'\gamma') + 2\lambda(\beta\beta' - 2\alpha\gamma' - 2\gamma\alpha') + \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0\,.$$

Cette équation détermine les deux valeurs de λ correspondantes aux deux points d'intersection de la droite MM′ et de

la conique (K), et, d'après les principes connus, le rapport anharmonique de M, M' et de ces deux points sera égal au rapport des racines de l'équation précédente.

En appelant r ce rapport, on a

$$\frac{(r+1)^2}{4r}=\frac{(\beta\beta'-2\alpha\gamma'-2\gamma\alpha')^2}{(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma')}\,. \tag{3}$$

On déduira de là la valeur de r, puis la distance δ des deux points, par la formule

$$e^{2i\delta}=r\,. \tag{4}$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera que l'angle V des deux droites définies par les équations

$$m\alpha+n\beta+p\gamma=0\,,\qquad m'\alpha+n'\beta+p'\gamma=0$$

est donné par la formule

$$e^{2iV}=r'\,, \tag{5}$$

où

$$\frac{(1+r')^2}{r'}=\frac{2nn'-mp'-pm'}{(n^2-mp)(n'^2-m'p')}\,. \tag{6}$$

Voyons maintenant ce que deviennent ces formules dans notre système de coordonnées. Il suffit évidemment, pour avoir la distance des deux points définis par les coordonnées $\rho, \rho_1, \alpha, \alpha_1$, de substituer aux coordonnées ordinaires leurs expressions en fonction de $\rho, \rho_1, \alpha, \alpha_1$, ce qui se fait sans difficulté. On trouve ainsi, presque sans calcul,

$$\sin^2\frac{\delta}{2}=\frac{(\rho-\alpha)(\rho_1-\alpha_1)}{(\rho-\rho_1)(\alpha-\alpha_1)}\,, \tag{7}$$

$$\cos^2\frac{\delta}{2}=-\frac{(\rho-\alpha_1)(\rho_1-\alpha)}{(\rho-\rho_1)(\alpha-\alpha_1)}\,, \tag{8}$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{\delta}{2}=-\frac{(\rho-\alpha)(\rho_1-\alpha_1)}{(\rho-\alpha_1)(\rho_1-\alpha)}\,. \tag{9}$$

A la surface de la sphère, δ sera l'arc joignant les deux

points; $2 \sin\frac{\delta}{2}$ la corde, c'ést-à-dire la distance rectiligne des deux points. On voit que les seconds membres de ces formules et leurs inverses sont les six rapports anharmoniques qu'on peut former avec les quantités ρ, ρ_1, α, α_1.

Examinons maintenant un autre problème, et proposons-nous, étant données deux droites, se coupant en un point (ρ, ρ_1) et passant l'une par le point (α, α_1), l'autre par le point (β, β_1), de trouver l'angle qu'elles forment entre elles. Appliquons les formules (5) et (6). Pour la première de ces droites, on a

$$m = \rho + \rho_1 - \alpha - \alpha_1,$$
$$n = \alpha\alpha_1 - \rho\rho_1,$$
$$p = \rho\rho_1(\alpha + \alpha_1) - (\rho + \rho_1)\alpha\alpha_1,$$

et pour la seconde on a des valeurs semblables de m', n', p'. En substituant ces valeurs dans la formule (6), on trouve

$$(10) \qquad \frac{(1+r')^2}{r'} = \frac{(M+M_1)^2}{MM_1},$$

où

$$M = \frac{(\rho-\beta)(\rho-\beta_1)}{(\rho-\alpha)(\rho-\alpha_1)}, \qquad M_1 = \frac{(\rho_1-\beta)(\rho_1-\beta_1)}{(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\alpha_1)};$$

et, par suite,

$$r' = \frac{M}{M_1} \text{ ou } \frac{M_1}{M}.$$

On a donc

$$(11) \qquad V' = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{M}{M_1}.$$

Le double signe correspond aux deux sens dans lesquels on peut considérer l'angle des droites, ou celui des grands cercles de la sphère se projetant suivant les droites.

Nous avons obtenu l'expression de la distance de deux points et de l'angle de deux droites dans notre système de coordonnées. Au moyen de ces expressions, convenant aussi aux figures sphériques, on démontrera sans difficulté les pro-

positions de la *Troisième Partie*. Nous nous contenterons d'établir l'équation fondamentale (69) de l'article 33.

Soit un triangle sphérique ABC, dont les sommets ont pour coordonnées $\alpha, \alpha_1 ; \beta, \beta_1 ; \gamma, \gamma_1$. D'après la formule (11), les angles A, B, C de ce triangle seront donnés par les formules

$$e^{2iA} = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha_1-\beta)(\alpha-\gamma_1)(\alpha_1-\beta_1)}{(\alpha-\beta)(\alpha_1-\gamma)(\alpha-\beta_1)(\alpha_1-\gamma_1)},$$

$$e^{2iB} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta_1-\gamma)(\beta-\alpha_1)(\beta_1-\gamma_1)}{(\beta-\gamma)(\beta_1-\alpha)(\beta-\gamma_1)(\beta_1-\alpha_1)},$$

$$e^{2iC} = \frac{(\gamma-\beta)(\gamma_1-\alpha)(\gamma-\beta_1)(\gamma_1-\alpha_1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma_1-\beta)(\gamma-\alpha_1)(\gamma_1-\beta_1)},$$

d'où il suit, en multipliant membre à membre, et en appelant S l'aire du triangle ABC,

$$e^{2iS} = \frac{(\alpha-\gamma_1)^2(\gamma-\beta_1)^2(\beta-\alpha_1)^2}{(\alpha_1-\gamma)^2(\gamma_1-\beta)^2(\beta_1-\alpha)^2}.$$

Or, soient M, M′ deux points de la sphère, de coordonnées γ_1, β pour M, et β_1, γ pour M′; et soient δ, δ' les arcs AM, AM′. D'après les formules (7), on aura

$$(12) \qquad e^{2iS} = \frac{\sin^4 \frac{\delta}{2}}{\sin^4 \frac{\delta'}{2}},$$

et par suite

$$e^{i\frac{S}{2}} = \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta'}{2}}.$$

Les points B′, C′, associés à B, C, ont pour coordonnées $\beta, \gamma_1 ; \gamma, \beta_1$; les points M, M′ sont donc diamétralement opposés à B′, C′, et nous retrouvons la formule de l'article 33.

Il est à remarquer qu'en extrayant la racine quatrième des deux membres de l'équation (12), nous avons choisi une racine

particulière du second. Ce choix se justifie ; il suffit de supposer que le troisième sommet C du triangle vienne se placer sur l'arc AB. Les deux membres deviennent alors égaux à l'unité.

IV.

On peut encore appliquer les remarques précédentes à l'interprétation de certaines équations considérées soit dans le plan, soit sur la sphère.

Nous avons vu, dans la Note précédente, que l'équation

$$\frac{f(\rho)}{\varphi(\rho)} = \frac{f(\rho_1)}{\varphi(\rho_1)} \tag{13}$$

peut représenter, dans certains cas, des coniques inscrites dans un même quadrilatère circonscrit à la conique (K). La même équation représentera alors sur la sphère des coniques homofocales.

Supposons que, dans l'équation (13), $f(\rho)$ et $\varphi(\rho)$ soient de degré $2n$. Alors les coniques planes seront circonscrites à un polygone formé de $2n$ tangentes à (K), et se partageront tous les sommets de ce polygone. Les coniques sphériques seront circonscrites à un polygone formé de $2n$ génératrices rectilignes. Si l'on désigne, par exemple, ces génératrices par les nombres $1, 2, 3, \ldots, 2n$, la première conique contiendra les sommets (1 2), (2 3), ... ; la seconde, (1 3), (2 4), (3 5), ... ; la troisième, (1 4), (2 5), ... Or l'équation (13) peut s'écrire

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{(\rho - a_i)(\rho - a'_i)}{(\rho - b_i)(\rho - b'_i)} : \frac{(\rho_1 - a_i)(\rho_1 - a'_i)}{(\rho_1 - b_i)(\rho_1 - b'_i)} = 1,$$

et, si l'on tient compte de la formule (11), on voit que l'équation précédente exprime la propriété suivante.

Formons les n segments dont les extrémités sont les points (a_i, a'_i) et (b_i, b'_i). La somme des angles sous lesquels on

voit ces segments d'un point de la courbe est égale à un multiple de π.

Nous avons donc le théorème suivant :

Soit une conique (C), circonscrite à une série de polygones d'un nombre pair de sommets, circonscrits à une conique (K). Soient $A_1, \ldots, A_n$, n sommets, pris de deux en deux, de l'un de ces polygones; $B_1, \ldots, B_n$, n sommets, choisis de la même manière, d'un autre de ces polygones. La somme des angles [par rapport à (K)] sous lesquels on voit d'un point de la courbe les segments $A_1B_1 \ldots, A_nB_n$, est égale à un multiple de π.

On peut généraliser ce théorème en prenant tous les sommets, et alors il s'applique aux polygones d'un nombre impair de côtés. Mais il est surtout utile sous la forme précédente.

Si nous nous proposons d'appliquer cette proposition aux coniques sphériques, nous voyons tout d'abord que, si une conique sphérique est circonscrite à un polygone formé de $2n$ génératrices rectilignes de la sphère, n sommets au plus de ce polygone peuvent être réels. En joignant ces sommets réels aux sommets correspondants de tout autre polygone inscrit, on formera des segments qui seront vus de tout point de la conique sphérique sous des angles dont la somme sera un multiple de π. Le lieu complet des points tels que la somme de ces angles soit un multiple de π se composera de cette conique et d'autres coniques homofocales.

Enfin, une application de ce même théorème peut être faite à la théorie de certaines surfaces du second degré, qu'on définit de la manière suivante.

Soit une quadrique (Q), coupant le cercle de l'infini suivant une conique (C), et supposons, ce qui n'a pas lieu en général, que la conique (C) soit circonscrite à une série de polygones d'un nombre pair $2n$ de côtés, circonscrits au cercle de l'infini, que nous appellerons ici (K). Soient deux polygones inscrits à (C) et circonscrits à (K), et formons avec leurs sommets les n segments $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$, définis précédem-

ment. Les extrémités de ces segments sont sur la conique (C), et par chacune de ces extrémités A_i, B_i on peut faire passer une génératrice rectiligne de (Q), d'un système donné. Appelons ces génératrices α_i, β_i, etc. Alors la génératrice d'un système opposé, passant par un point M de (C), rencontrera toutes les droites fixes α_i, β_i, et les plans passant par cette génératrice et par les droites α_i, β_i auront pour traces sur le plan de l'infini les droites MA_i, MB_i. Donc l'angle des plans (M, α_i), (M, β_i) est le même que celui des droites MA_i, MB_i, mesuré par rapport au cercle de l'infini. En appliquant donc le théorème déjà donné, nous avons la proposition suivante :

Quand une quadrique est circonscrite à un polygone de $2n$ sommets circonscrit au cercle de l'infini, on peut, et d'une infinité de manières, choisir sur cette quadrique deux groupes de n génératrices d'un même système, tels que les plans passant par un point de la surface et les génératrices du premier groupe forment avec les plans passant par le même point et les génératrices du second groupe des angles dont la somme soit égale à un multiple de π.

Par exemple, les hyperboloïdes étudiés par M. Chasles (*Journal de Liouville*, 1re série, t. I, p. 324), lieux des points tels que le rapport de leurs distances à deux droites fixes soit constant, sont circonscrits à une série de quadrilatères circonscrits eux-mêmes au cercle de l'infini. Ils ont un axe de symétrie perpendiculaire aux deux droites fixes, et, si l'on prend deux de leurs génératrices quelconques d'un même système, l'angle sous lequel on verra ces droites d'un point variable de la surface est égal à celui sous lequel on voit leurs symétriques par rapport à l'axe de symétrie, qui est perpendiculaire aux deux droites fixes.

Note IV.

Sur quelques surfaces remarquables du second degré et sur les cyclides correspondantes.

I.

Les résultats obtenus dans la *Troisième Partie* sont fondés sur une propriété importante de la fonction qui exprime le carré de la distance de deux points, en géométrie plane. Cette fonction, quand les deux points sont dans un plan, se décompose en un produit de deux facteurs linéaires. Une telle décomposition ne peut plus se faire quand les deux points que l'on considère sont situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais nous allons voir qu'elle subsiste quand on considère les distances des points de l'espace à des droites.

Soient, en effet,

$$(1)\qquad \begin{cases} P = Ax + By + Cz + D = 0, \\ P' = A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

les équations d'une ligne droite. En appliquant les méthodes de la géométrie analytique, on trouvera la formule suivante, qui donne la distance δ d'un point (x, y, z) à la droite,

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta^2 = \dfrac{(A'P - AP')^2 + (B'P - BP')^2 + (C'P - CP')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2} \\ = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)P'^2 + (A'^2+B'^2+C'^2)P^2 - 2(AA'+BB'+CC')PP'}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2) - (AA'+BB'+CC')^2} \end{cases}$$

Cela posé, supposons qu'on ait choisi, pour déterminer la droite, les deux plans qu'on peut mener par la droite tangentiellement au cercle de l'infini. Ces plans sont distincts, tant

que la droite ne rencontre pas le cercle de l'infini. Supposons que ce soient les plans (P), (P'). On aura alors

$$A^2 + B^2 + C^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2 = 0\,, \tag{3}$$

et la formule (2) deviendra

$$\delta^2 = \frac{2PP'}{AA' + BB' + CC'}\,. \tag{4}$$

On voit que le carré de la distance d'un point à une droite fixe se décompose en deux facteurs linéaires par rapport aux coordonnées du point. Ces facteurs sont évidemment imaginaires.

Réciproquement, étant donnés deux plans quelconques (P), (P'), tangents au cercle de l'infini, le produit PP' des premiers membres de leurs équations représente, d'après la formule (4), une quantité proportionnelle au carré de la distance à leur droite d'intersection.

Soient δ, δ' deux droites définies, l'une par les plans P, P', l'autre par les plans Q, Q', ces quatre plans étant tangents au cercle de l'infini. Les plans P, Q ; P', Q' déterminent deux droites δ'', δ''', qui forment un couple associé au premier. De même, les combinaisons P, Q' ; Q, P', déterminent deux nouvelles droites δ^{iv}, δ^{v}, formant un nouveau couple. Ces six droites forment les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre circonscrit au cercle de l'infini, et ces droites associées donnent lieu à plusieurs propriétés.

Par exemple, on a, en désignant par δ_i la distance d'un point de l'espace à la droite correspondante,

$$\delta^2\delta'^2 = k\,PP'QQ'\,, \qquad \delta''^2\delta'''^2 = k_1\,PP'QQ'\,,$$

k, k_1 étant des constantes que la formule (4) apprend à déterminer.

Donc

$$\delta''\delta''' = h\,\delta\delta'\,, \tag{5}$$

et nous sommes conduits au théorème suivant :

Étant données deux droites quelconques de l'espace, si par

ces droites on mène les plans tangents au cercle de l'infini, on forme un tétraèdre tel que les produits des distances d'un point aux trois couples d'arêtes opposés conservent des rapports constants quand le point se déplace dans l'espace.

Étudions ces plans tangents au cercle de l'infini. Voici comment on peut former leur équation la plus générale. Soient (P), (P') deux plans rectangulaires quelconques, et désignons par p, p' les distances d'un point de l'espace à ces plans. On aura des équations de la forme

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - h,$$

où

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

et de même,

$$p' = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - h'.$$

D'ailleurs

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Cela posé, l'équation d'un plan (P) tangent au cercle de l'infini est

$$\text{(6)} \qquad P = \lambda(p + ip'),$$

où λ est une constante réelle. Celle du plan conjugué P' est

$$\text{(7)} \qquad P' = \lambda(p - ip').$$

Appelons maintenant δ la distance du point (x, y, z) à la droite (p, p') ou (P, P'), et ω l'angle que fait avec le plan (p) le plan passant par ce point et par la droite. On a

$$p = \delta\cos\omega, \quad p' = \delta\sin\omega,$$

et par suite

$$\text{(8)} \qquad P = \lambda\delta e^{i\omega}, \quad P' = \lambda\delta e^{-i\omega},$$

d'où

$$\text{(9)} \qquad \frac{P}{P'} = e^{2i\omega}, \quad PP' = \lambda^2\delta^2,$$

formules dont la première seule n'avait pas été établie plus haut.

Si, pour un second point (x_1, y_1, z_1) les fonctions P, P′ prennent les valeurs P_1, P'_1, et δ, ω les valeurs δ_1, ω_1, on a

$$\frac{P'}{P_1'} = e^{2i\omega_1},$$

et par suite,

$$\frac{P}{P'} : \frac{P_1}{P_1'} = e^{2i(\omega - \omega_1)}, \tag{10}$$

$\omega - \omega_1$ est l'angle sous lequel se coupent les deux plans passant par la droite (P, P′) et par les deux points considérés. L'équation précédente exprime un théorème connu.

Associons à la droite (P, P′) une seconde droite (Q, Q′), définie de la même manière. On aura ici

$$e^{2i\omega'} = \frac{Q}{Q'},$$

et par suite

$$e^{2i(\omega + \omega')} = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

Les droites (P, Q), (P′, Q′) forment un couple associé aux deux premières. Nous avons dans le second membre, à un facteur constant près, le rapport des carrés des distances du point (x, y, z) à ces droites.

Donc si l'on a deux droites δ, δ', et un couple de droites associées δ'', δ'', le rapport des distances d'un point quelconque de l'espace aux deux droites δ, δ' est une fonction $ke^{i(\omega+\omega')}$ de la quantité $\omega + \omega'$. Ces angles ω, ω' sont ceux que font les plans passant par le point variable et les droites δ'', δ'', respectivement avec des plans fixes passant par ces deux droites.

Si δ et δ' deviennent imaginaires conjuguées, un des couples associés sera formé de droites réelles, et l'on pourra remplacer le rapport des distances à deux droites imaginaires par une fonction imaginaire des éléments géométriques réels ω, ω'.

D'après cela, étant donnée une surface telle que le produit des distances d'un de ses points à n droites $\delta_1, \ldots, \delta_n$ soit

proportionnel au produit des distances du même point à n autres droites $\delta'_1, \ldots, \delta'_n$, on pourra dire qu'analytiquement cette définition revient à la suivante :

On a $2n$ droites $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$ (associées aux couples δ_i, δ'_i). Pour chacune, on mesure l'angle que fait le plan déterminé par elle et par un point quelconque M de la surface avec un plan fixe parallèle à la droite. La somme de ces angles, comptés dans un sens déterminé, est constante.

Mais, comme les droites servant à l'une au moins des deux définitions sont imaginaires, le lien établi n'a qu'une valeur purement analytique, et il peut simplement servir à faire reconnaître l'analogie de deux lieux géométriques dont les définitions pourraient paraître très différentes au premier abord.

La remarque précédente aurait cependant une plus grande importance si la surface définie par l'équation

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n = k . \delta'_1 \delta'_2 \ldots \delta'_n$$

conservait la même définition avec une infinité d'autres système des $2n$ droites. Lorsque ces droites deviendraient imaginaires conjuguées, il faudrait leur substituer les droites associées réelles ε_i, et adopter la seconde définition. Nous sommes donc conduits à nous proposer la question suivante, analogue à celle que nous avons résolue pour le plan (art. 27) :

Une surface peut-elle être représentée, et d'une infinité de manières, par une équation de la forme

$$\delta_1 \ldots \delta_n = k . \delta'_1 \ldots \delta'_n \, ?$$

Soit

$$\delta_1^2 = PQ \, ;$$

chaque plan

$$P = 0$$

devra couper la surface suivant $2n$ droites.

Si une infinité d'équations de la forme précédente conviennent à la surface, celle-ci sera donc réglée, et même, à ce

qu'il semble, admettra un double système de génératrices rectilignes. Ce fait ne peut se présenter que si le lieu se décompose en surfaces du second degré. Nous allons voir que cette hypothèse peut se réaliser.

II.

Soit une quadrique (Q), et une conique (C) située d'une manière quelconque. Supposons qu'il existe une série de polygones plans d'un nombre pair $2n$ de côtés, circonscrits à (C) et inscrits à (Q), et considérons l'un quelconque de ces polygones.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n; p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ les deux groupes formés en prenant de deux en deux les côtés de ce polygone. L'équation de la section de (Q) par le plan de (C) pourra être, comme on sait, représentée par une équation de la forme

$$(11) \qquad p_1 p_2 \ldots p_n = k . p'_1 p'_2 \ldots p'_n ,$$

où p_i, p'_i désignent les distances aux côtés correspondants du polygone. L'équation précédente convient en même temps à d'autres coniques, qu'on peut définir de la manière suivante :

Supposons que la section de (Q) contienne les sommets

$$p_1 p'_1 , p'_1 p_2 , p_2 p'_2 , \ldots .$$

Les sommets

$$p_1 p_2 , p'_1 p'_2 , p_2 p_3 , \ldots$$

seront sur une autre conique, les sommets

$$p_1 p'_3 , p'_1 p_3 , \ldots$$

sur une troisième conique, et ainsi de suite. La dernière de ces coniques se réduit à une droite, si n est impair.

Toutes ces coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, circonscrit à (C) et à (Q), et par chacune d'elles on peut faire passer une quadrique inscrite dans la développable $\boxed{(C)\ (Q)}$.

Soient (Q′), (Q″), … les quadriques ainsi définies; la dernière sera un plan, si n est impair.

Cela posé, menons par chacun des côtés p_i, p'_i des plans tangents à la quadrique (Q), se coupant consécutivement suivant des génératrices rectilignes de (Q) passant aux points $p_1 p'_1$, $p'_1 p_2$, ….

Soient P_i, P'_i les plans ainsi obtenus. L'équation

$$(12) \qquad P_1 P_2 \ldots P_n = k_1 . P'_1 P'_2 \ldots P'_n$$

représente une surface ayant avec la quadrique $2n$ droites communes, celles qui passent par les $2n$ sommets. De plus, on peut disposer de k_1 de telle manière que, si l'on coupe par le plan de (C), l'équation (12) se réduise à l'équation (11), et par conséquent le lieu représenté par cette équation aura, avec la quadrique (Q), $2n$ droites et une conique communes. Il devra donc contenir la quadrique (Q). Pour la même raison, il contiendra les quadriques (Q′), (Q″), …, inscrites dans la développable |(C) (Q)| et déjà définies.

Nous avons donc le théorème suivant, équivalent à celui de l'article 38 :

Le lieu représenté par l'équation

$$(13) \qquad P_1 P_2 \ldots P_n = k . P'_1 P'_2 \ldots P'_n$$

peut se décomposer en quadriques, toutes inscrites dans une même développable, et alors l'ensemble de ces quadriques peut, d'une infinité de manières, être représenté par une équation de la forme précédente. Tous les plans P_i, P'_i *demeurent tangents à toutes les quadriques.*

Si n est impair, l'une de ces quadriques se réduit à un plan.

Nous allons faire deux applications intéressantes de ce théorème.

1° Supposons que dans la développable |(C) (Q)| on puisse inscrire une sphère; les plans P_i, P'_i, dans toutes les équations de la forme précédente, demeureront tangents à la sphère. L'anallagmatique dérivée du lieu représenté par

l'équation (13) aura donc, d'après les résultats de l'article 44, une infinité d'équations de la forme

$$R_1 R_2 \ldots R_n = k . R'_1 R'_2 \ldots R'_n .$$

D'ailleurs, elle se décompose en cyclides homofocales, correspondantes aux différentes quadriques faisant partie du lieu représenté par l'équation (13). Nous avons donc la proposition suivante, déjà énoncée, pour le cas particulier de quatre pôles, par M. Moutard :

L'équation

$$(14) \qquad R_1 R_2 \ldots R_n = k . r_1 r_2 \ldots r_n$$

peut convenir à tous les points d'une cyclide. Il suffit qu'on puisse inscrire dans la focale un polygone formé de $2n$ *génératrices de la déférente, et alors l'équation* (14) *représentera, en même temps que la cyclide, d'autres cyclides homofocales.*

L'une de ces cyclides se réduit à l'une des sphères principales, si n est impair.

2° Supposons qu'on puisse circonscrire au cercle de l'infini un polygone de $4n$ côtés, inscrit dans (Q). Alors l'équation de la quadrique (Q) pourra s'écrire

$$(15) \qquad P_1 P_2 \ldots P_{2n} = k . P'_1 P'_2 \ldots P'_{2n} ,$$

et P_i, P'_i sont des plans tangents au cercle de l'infini. Cette équation exprime donc qu'il y a un rapport constant entre les produits des distances d'un point de la surface à deux séries de n droites,

$$P_1 , P_2 ; P_3 , P_4 ; \ldots ; P_{2n-1} , P_{2n} ,$$

d'une part, et les droites

$$P'_1 , P'_2 ; P'_3 , P'_4 ; \ldots ; P'_{2n-1} , P'_{2n}$$

pour le second groupe. Donc,

Si une quadrique est circonscrite à un polygone de $4n$ *sommets circonscrit au cercle de l'infini, on peut choisir, et d'une infinité de manières, deux séries de n droites, telles que, pour tout point de la quadrique, il y ait un rapport constant entre les produits des*

distances aux deux séries de droites. Le lieu complet des points jouissant de cette propriété se compose de plusieurs quadriques homofocales.

C'est la généralisation des théorèmes de M. Chasles sur l'hyperboloïde, lieu des points dont les distances à deux droites ont un rapport constant. Cet hyperboloïde est la plus simple des surfaces considérées ici, et les théorèmes généraux de cette Note et de la précédente conduiraient à plusieurs propriétés nouvelles de cette surface. Mais nous terminerons ici, sans insister davantage, notre étude des diverses formes et des applications des théorèmes relatifs aux polygones inscrits et circonscrits.

Note V.

Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la géométrie de M. Cayley.

I.

Dans les articles 61 et 62 du texte et dans la Note III, nous avons essayé de donner une idée des rapports que M. Cayley a établis entre la géométrie des relations métriques et celle du rapport anharmonique. Les théories de l'illustre géomètre anglais ont été résumées dans l'ouvrage de M. Fiedler *sur les formes binaires*. Dans ces derniers temps, elles ont été développées dans un Mémoire important de M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. IV).

Une fois définies les notions d'angles et de distances, les autres définitions de la géométrie métrique ordinaire subsistent, et peuvent être introduites sans aucune difficulté. C'est ainsi que, dans l'article 62, nous avons généralisé les notions de focales et de lignes de courbure. Nous allons nous occuper maintenant des lignes géodésiques.

Étant donnée une figure dans l'espace, prenons pour *surface absolue* la sphère représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{1}$$

Alors la distance de deux points déterminés par les coordonnées (x, y, z), (x', y', z') sera donnée par la formule

$$\cos^2 \delta = \frac{(xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}, \tag{2}$$

tout à fait analogue à la formule (3) de la Note III. On aura aussi

$$(3)\quad \sin^2\delta = \frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)-(xx'+yy'+zz'-R^2)^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)}.$$

Pour deux points intérieurs à la sphère, le second membre de cette équation est négatif; la distance δ de deux points sera donc une quantité imaginaire de la forme $A\,i$.

Si le point (x', y', z') est voisin du point (x, y, z), on fera

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz,$$

et la formule (3), en y remplaçant $\sin^2\delta$ par δ^2 ou $d\sigma^2$, donnera

$$(4)\quad d\sigma^2 = \frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(xdx+ydy+zdz)^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}.$$

Telle est l'expression de la distance $d\sigma$ de deux points infiniment voisins.

Nous allons maintenant chercher les lignes géodésiques d'une surface définie par l'équation

$$(5)\quad f(x, y, z) = 0.$$

Je dis que ces lignes géodésiques sont caractérisées par cette propriété, que leur plan osculateur est normal au plan tangent (c'est-à-dire passe par le pôle de ce plan). On voit que cette proposition est la généralisation de la propriété fondamentale des lignes géodésiques ordinaires.

A cet effet, prenons, pour plus de symétrie, une variable indépendante quelconque t, et soient x', y', z' les dérivées de x, y, z par rapport à t.

Nous avons

$$(6)\quad d\sigma = \sqrt{F}.dt,$$

$$(7)\quad F = \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{x^2+y^2+z^2-R^2} - \left(\frac{xx'+yy'+zz'}{x^2+y^2+z^2-R^2}\right)^2;$$

et l'intégrale à rendre minimum est

$$(8)\quad \int\sqrt{F}.dt,$$

les variables x, y, z étant liées par l'équation de la surface. D'après les principes du calcul des variations, les équations différentielles de la ligne géodésique sont

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial\sqrt{F}}{\partial x'}=\frac{\partial\sqrt{F}}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{9}$$

et les deux équations analogues en y et z.

Il reste à vérifier que le plan osculateur de la ligne définie par ces équations est conjugué du plan tangent par rapport à la sphère. Or, pour que deux plans ayant pour équations

$$mx+ny+pz+q=0\,,\qquad m'x+n'y+p'z+q=0$$

soient conjugués ou normaux (par rapport à la sphère), il faut que l'on ait

$$R^2(mm'+nn'+pp')-qq'=0\,.$$

Appliquons cette relation au plan osculateur et au plan tangent; il faudra qu'en appelant x'', y'', z'' les dérivées secondes de x, y, z, on ait

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z} \\ x & y & z & R^2 \\ x' & y' & z' & 0 \\ x'' & y'' & z'' & 0 \end{vmatrix}=0\,. \tag{10}$$

Or les formules (9), développées, nous donnent des expressions de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=Ax+Bx'+Cx''\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=Ay+By'+Cy''\,,\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=Az+Bz'+Cz''\,, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

et l'équation à vérifier prend alors la forme

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-AR^2=0\,.$$

ou, en substituant les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &A(x^2+y^2+z^2-R^2)+B(xx'+yy'+zz') \\ &\qquad +C(xx''+yy''+zz'')=0\,; \end{aligned}\right.$$

et l'on reconnaîtra, en substituant les valeurs de A, B, C, que cette dernière équation se vérifie identiquement.

Notre théorème est donc démontré : *Les lignes géodésiques ont leur plan osculateur normal au plan tangent.*

Il résulte de ce théorème que la ligne la plus courte entre deux points de l'espace est, dans la géométrie de M. Cayley, la ligne droite qui joint ces deux points. Car la ligne la plus courte réunissant deux points de l'espace sera géodésique sur toutes les surfaces qui la contiendront, et par conséquent devra avoir son plan osculateur indéterminé. Ainsi,

Dans la géométrie de M. Cayley, les lignes droites sont les lignes les plus courtes entre deux points.

On suppose toutefois qu'en allant d'un point à l'autre on ne rencontre pas la sphère; car alors il y aurait discontinuité, la distance devenant infinie. Ainsi, les deux points doivent être à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère.

Il suit du théorème précédent qu'on saura déterminer les lignes géodésiques sur toute surface du second degré (Q). Car soit (S) la sphère absolue; la surface développable ayant son arête de rebroussement sur (Q) et tangente à une quadrique quelconque (Q') inscrite dans la développable $\overline{(S)\ (Q)}$ aura précisément pour arête de rebroussement une ligne géodésique de (Q). Il y a, entre ces lignes et les lignes ordinaires, une relation qui est bien exprimée par le théorème suivant :

Une ligne géodésique ordinaire d'une quadrique (Q) *est aussi ligne géodésique en prenant pour absolu toute quadrique homofocale à* (Q).

De nouvelles conséquences peuvent être déduites, si l'on emploie la méthode de transformation définie à l'article 44 du texte. Nous avons vu que cette transformation conserve les

angles, les focales, les lignes de courbure (art. 62). Si l'on se sert des formules 14 de l'article 44, et que l'on appelle X, Y, Z les coordonnées du point correspondant au point (x, y, z), on trouvera

$$d\sigma^2 = \frac{-4R^2(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}{(X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2)^2} . \tag{13}$$

Ainsi, l'arc $d\sigma$ défini précédemment se ramène, dans la figure anallagmatique correspondante, en négligeant un facteur constant, et en posant

$$dS = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

à

$$\frac{dS}{X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2}$$

Donc, du théorème relatif aux lignes les plus courtes indiqué plus haut, et des notions acquises (art. 44 et 62) sur la transformation considérée, nous concluons les propositions suivantes :

Les lignes rendant minimum entre deux points de l'espace l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2} \tag{14}$$

sont des cercles orthogonaux à la sphère définie par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 . \tag{15}$$

Les lignes tracées sur une surface et rendant minimum la même intégrale sont celles pour lesquelles il y a une sphère passant par trois points consécutifs, normale à la surface et à la sphère fixe (15).

On peut déterminer ces lignes pour les cyclides. Elles correspondent aux lignes géodésiques de la surface du second degré homologue de la cyclide. Leur propriété géométrique est la suivante : La sphère passant par trois points consécutifs et normale à la surface est tangente à une cyclide homofocale à la proposée.

II.

Les lignes de courbure dans la géométrie de M. Cayley peuvent être définies (art. 62) de la manière suivante. Ce sont les courbes telles que les normales à la surface en tous leurs points forment une surface développable. On sait que les normales sont les droites joignant le point de contact du plan tangent au pôle de ce plan. Mais ici le principe de dualité exige que nous introduisions une autre droite, que nous appellerons *seconde normale,* et qui sera l'intersection du plan tangent avec le plan polaire du point de contact. La première et la seconde normale sont des droites polaires l'une de l'autre. Quand on prend la polaire réciproque de la surface par rapport à la sphère, la première normale se transforme en la seconde, et réciproquement.

Puisque l'on a introduit une seconde normale, on peut se demander quel sera le lieu des points de la surface pour lesquels les secondes normales forment une surface développable. On aurait ainsi des lignes de seconde courbure, mais ces lignes coïncident avec les lignes déjà définies; car, si les premières normales forment une surface développable, il en est de même des secondes normales, qui sont leurs droites polaires, et réciproquement.

Ainsi, sur toute surface, il y a un double système de lignes dont les tangentes sont conjuguées dans l'indicatrice et dans la sphère, et qui sont telles que, pour chacune de ces lignes, soit les premières, soit les secondes normales forment une surface développable.

Il suit de cette réciprocité entre les deux séries de normales, et de la remarque, faite plus haut, que ces normales se changent l'une dans l'autre, que, si l'on remplace une surface (F) par sa polaire réciproque (F_1), prise par rapport à la sphère absolue, les lignes de courbure se correspondent. Ainsi,

Une transformation par la méthode des polaires réciproques

(la surface directrice étant la sphère absolue) conserve les lignes de courbure.

Si maintenant on prend les deux surfaces (F), (F_1) pour déférentes de deux anallagmatiques (Σ), (Σ_1), nous voyons qu'il y aura correspondance entre ces deux surfaces, de telle manière qu'à une ligne de courbure (ordinaire) de l'une corresponde une ligne de courbure (ordinaire) de l'autre. Nous avons donc une transformation de surfaces avec conservation des lignes de courbure. Voici comment on peut définir cette transformation.

Si d'un point m de (F), comme centre, on décrit une sphère orthogonale à la sphère directrice (S), et la coupant suivant un cercle situé dans le plan (P), ce plan (P) sera le plan polaire de m et touchera en m_1 la polaire réciproque (F_1) de (F). D'ailleurs, en considérant (F_1) comme déférente, au plan (P) correspondent deux points de l'anallagmatique (Σ_1), qui seront les sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (P). En réunissant tous ces résultats, nous avons la proposition suivante :

Etant donnée une surface (Σ), *on lui mène des sphères tangentes, orthogonales à une sphère fixe* (S). *Le lieu des sphères de rayon nul, passant par l'intersection de ces sphères tangentes et de* (S), *est une surface* (Σ_1), *dont les lignes de courbure sont les transformées des lignes de courbure de* (Σ). *La relation entre* (Σ) *et* (Σ_1) *est réciproque. Elles admettent pour surfaces déférentes deux surfaces polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à* (S).

Il est à remarquer que (Σ) n'est pas nécessairement anallagmatique par rapport à (S).

La transformation précédente équivaut, quand la sphère (S) est réelle et qu'on la change par une inversion en un plan, à une transformation déjà donnée par M. O. Bonnet [1], et qu'on peut définir ainsi :

---

[1] O. Bonnet : *Note sur un genre particulier de surfaces réciproques.* Comptes rendus, t. XLII, p. 485-487.

On mène à une surface les sphères tangentes ayant leurs centres dans un plan donné (P). Le lieu des sphères de rayon nul passant par l'intersection de ces sphères et du plan (P) est la surface correspondante à la première.

Cette dernière transformation fait correspondre à un point réel de l'une des surfaces un point imaginaire de l'autre. La transformation sphérique n'a pas nécessairement cet inconvénient ; il suffit que le rayon R de la sphère soit de la forme $K\sqrt{-1}$ pour qu'à un point réel de l'une des surfaces corresponde un point réel de l'autre. Dans la Note IX nous généraliserons d'ailleurs ce mode de transformation.

Nous indiquons ici l'ensemble des théorèmes sur les lignes de courbure que nous avons démontrés ou qui résultent immédiatement des remarques précédentes.

Les lignes de courbure forment deux systèmes de lignes orthogonales, et conjuguées par rapport à l'indicatrice de chaque point.

Les normales en tous les points d'une ligne de courbure forment une développable, dont l'arête de rebroussement est ligne géodésique de la surface des centres de courbure.

Si l'on a un système triple orthogonal, deux surfaces de système différent se coupent suivant une ligne de courbure commune.

Si deux surfaces se coupent sous un angle constant, leur ligne d'intersection ne peut être ligne de courbure d'une surface sans l'être en même temps de l'autre.

Dans une étude plus complète de la géométrie cayleyenne, il faudrait considérer, en même temps que les lignes géodésiques, leurs polaires réciproques, qn'on peut définir ainsi :

Étant donnés deux plans tangents à une surface, en suivant l'une de ces lignes, qui va d'un point de contact à l'autre, le plan tangent effectue la moindre rotation possible. Dans la géométrie ordinaire, ces lignes, qu'on pourrait appeler de *moindre rotation,* sont celles pour lesquelles la normale à la surface demeure parallèle à un plan fixe. Dans la géométrie

cayleyenne, leur détermination exige l'intégration d'une équation du second ordre. Je me contenterai de donner le théorème suivant :

Étant données deux quadriques (Q), (Q'), toute ligne tracée sur (Q) et dont les tangentes sont aussi tangentes à (Q'), est géodésique par rapport à toute quadrique inscrite dans la développable $|\overline{\underline{(Q)(Q')}}|$, et ligne de moindre rotation par rapport à toute quadrique passant par l'intersection de (Q) et de (Q').

Nous avons vu que, étant donnée une cyclide, on sait en trouver les lignes de courbure, qui sont algébriques, et les lignes de longueur nulle, qui sont transcendantes. Plus généralement, étant donnée une surface du 4ᵉ ordre à conique double (B), on saura résoudre les deux mêmes problèmes, trouver les lignes de courbure et les lignes de longueur nulle, en prenant pour absolu une quelconque des quadriques (S) qui lui sont inscrites. Car supposons que (S) soit une sphère, ce qu'on peut toujours réaliser par une transformation homographique, et considérons (B) comme déférente, (S) comme sphère directrice. L'anallagmatique correspondante se composera de deux cyclides, et les lignes de courbure et de longueur nulle de (B) par rapport à (S) correspondront point par point aux lignes de même définition de l'une des deux cyclides. Ces deux cyclides sont transformées par rayons vecteurs réciproques l'une de l'autre.

Note VI.

Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques et la théorie des pôles secondaires des cyclides.

Dans ses études sur la théorie des cyclides, M. Moutard a considéré, en même temps que les points nommés par lui *pôles principaux* et qui sont les centres des cinq sphères directrices, d'autres points qu'il a appelés *pôles secondaires*, et qui possèdent la propriété suivante. Si l'on transforme la cyclide par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant en un de ces points, et le module étant convenablement choisi, on obtient une surface symétrique de la première par rapport à un plan.

Si nous n'avons pas donné place à cette théorie des pôles secondaires dans notre travail, c'est qu'elle nous paraît exprimer des propriétés, non des cyclides, mais de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. C'est ce que nous allons montrer.

Les auteurs qui ont écrit sur la transformation par rayons vecteurs réciproques ont dû sentir le besoin d'un nom plus court pour désigner cette transformation. Nous l'appellerons, à l'exemple des géomètres anglais, *inversion*.

Une inversion est définie par la sphère, lieu des points qui se correspondent à eux-mêmes. Le centre de cette sphère sera le *pôle;* le rayon, le *module* de l'inversion. Voici comment on peut définir, étant donnée la sphère d'inversion (S), les couples de points correspondants A , A'.

Si l'on considère l'un de ces points, A par exemple, comme le centre d'une sphère de rayon nul (A), par l'intersection de (A) et de (S) passera une deuxième sphère de rayon nul (A'), dont le centre sera le point A'.

Ainsi, deux points correspondants sont les centres des deux sphères de rayon nul passant par un même cercle de la sphère d'inversion. Ce cercle est imaginaire quand les points sont réels.

Quand le point A décrit une surface (Σ), le point A' décrit une surface (Σ'). Le système (Σ, Σ') est anallagmatique par rapport à la sphère d'inversion, et la déférente est l'enveloppe des plans perpendiculaires sur le milieu de A A'.

Si la sphère d'inversion se réduit à un plan (P), alors à un point A correspond le point symétrique A' par rapport à (P). Les points A, A' sont, comme dans le cas général, les centres de deux sphères de rayon nul passant par un même cercle du plan d'inversion.

Nous avons donc deux espèces principales d'inversions : l'*inversion plane,* qui transforme une figure en sa symétrique par rapport au plan d'inversion, et l'*inversion sphérique.*

Il suit, de la définition que nous venons de donner, que, si deux figures (F), (F') sont les inverses l'une de l'autre par rapport à la sphère d'inversion (S), on peut soumettre le système à une inversion. Les figures (F), (F') se transformeront en (F_1), (F'_1), la sphère (S) en (S_1), et les deux figures (F_1), (F'_1) seront *inverses* ou réciproques par rapport à (S_1). Si la sphère (S) se transformait en un plan, les deux figures (F_1), (F'_1) seraient symétriques par rapport à ce plan.

Nous allons nous servir de ces remarques pour résoudre la question suivante :

Une figure étant soumise successivement à deux inversions I, I', *trouver tous les couples d'inversion produisant le même effet que les deux précédentes.*

Nous commencerons par supposer que les deux inversions I, I' soient planes, et définies par les plans P, P'. Alors, si une figure (F) est soumise à ces transformations, il faudra prendre sa symétrique par rapport au plan P, puis la symétrique de la figure obtenue par rapport au plan P'. *Ces deux opérations équivalent à une rotation autour de la droite* PP', *rotation d'un angle double de celui des plans* P. P'.

Ainsi, une rotation est l'équivalent de deux inversions planes, et par conséquent tout déplacement d'une figure dans l'espace équivaut à quatre inversions planes.

Nous voyons que l'effet de nos deux inversions I, I' ne sera pas changé si aux deux plans P, P' on substitue deux autres plans Q, Q', se coupant suivant la même droite que les premiers, et faisant le même angle dans le même sens.

Si les deux inversions I, I' sont sphériques, en les soumettant à une même inversion convenablement choisie, on peut les transformer en inversions planes, et, en leur appliquant la proposition précédente, on est conduit au théorème suivant :

Étant données deux inversions définies par les sphères (S), (S'), *on peut toujours les remplacer par deux nouvelles inversions. Les deux sphères* (S_1), (S'_1), *qui définissent ces inversions, passent par l'intersection des deux premières, et font le même angle, compté dans le même sens, que les deux premières.*

Les nouvelles inversions ainsi définies sont évidemment les seules qui puissent remplacer les premières.

Parmi ces couples d'inversions, définies par les sphères (S_1), (S'_1), il en est deux qui sont particulièrement remarquables :

1° La sphère (S_1) peut se réduire au plan radical de (S), (S'). Alors la première des deux inversions sera plane. Donc

Deux inversions quelconques opérées sur une figure (F) équivalent à une inversion sur la figure symétrique de (F) par rapport à un plan convenablement choisi.

2° La sphère (S'_1) peut se réduire au plan radical de (S) et (S'). Alors la seconde des inversions sera plane. Donc

Deux inversions quelconques, transformant une figure (F) en (F_1), peuvent toujours être remplacées par une inversion sphérique qui transforme (F) en la figure (F'_1) symétrique de (F_1) par rapport à un plan, et par l'inversion plane qui transforme (F'_1) en (F_1).

Ce dernier résultat a été indiqué par M. Mannheim (*Journal de Liouville,* t. XV, 2e série).

Revenons aux couples d'inversions sphériques qui peuvent remplacer les deux premières (S), (S'). Leurs pôles décrivent une droite fixe, la ligne des centres de (S) et de (S'); ils y déterminent deux divisions homographiques, dont les points doubles sont les points limites, centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de (S) et de (S'), et dont deux points correspondants sont les centres de (S) et de (S'). Il n'y aura donc aucune difficulté dans la construction de tous ces couples d'inversion.

Examinons maintenant ce que devient une figure après un nombre quelconque d'inversions $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

Appelons P les inversions planes et S les inversions sphériques. Les inversions I_1, I_2 peuvent se remplacer par une inversion plane P_1, suivie d'une inversion sphérique S_1, ce qu'on peut exprimer par la formule

$$I_1 I_2 = P_1 S_1 .$$

On aura de même

$$S_1 I_3 = P_2 S_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{n-1} I_n = P_{n-1} S_n .$$

Donc

$$(1) \qquad I_1 \ldots I_n = P_1 P_2 \ldots P_{n-1} S_n .$$

On démontrerait de même que

$$(2) \qquad I_1 \ldots I_n = S'_1 P'_1 \ldots P'_{n-1} .$$

En d'autres termes, une série d'inversions planes et sphériques peut toujours être remplacée soit par une suite d'inversions planes et une inversion sphérique, soit par une inversion sphérique suivie de plusieurs inversions planes.

J'ajoute qu'on peut toujours supposer que le nombre des inversions planes soit pair. En effet, s'il est impair, considérons par exemple la suite

$$P_1 \ldots P_{n-1} S_n ;$$

au lieu de S_n, définie par la sphère (S_n), de centre O et de

rayon R, prenons l'inversion définie par la sphère (S'_n) de centre O, mais de rayon $R\sqrt{-1}$. Les inversions S_n, S'_n, opérées sur une même figure, donnent deux figures symétriques par rapport au centre O. Or, on déduit une de ces figures de sa symétrique par trois inversions planes, définies par trois plans rectangulaires Q, Q', Q'', se coupant en O. On aura donc

$$(3) \qquad S_n = QQ'Q''S'_n,$$

et comme on ajoute trois inversions planes à un nombre impair de ces inversions, le nombre total sera pair.

Or, deux inversions planes équivalent à une rotation, un nombre pair d'inversions équivaut à un déplacement. Donc

Un nombre quelconque d'inversions peut toujours être remplacé soit par un déplacement et une seule inversion, soit par une inversion suivie d'un déplacement.

Deux inversions ne sont pas, en général, échangeables; pour qu'elles possèdent cette propriété, il faut et il suffit que leurs sphères soient orthogonales.

Soient deux sphères orthogonales (S), (S') définissant les deux inversions. Leur plan radical (P) et la sphère (S_1), décrite sur leur cercle d'intersection comme grand cercle, se coupent à angle droit. (P) et (S_1) définissent donc deux inversions pouvant remplacer les deux premières.

En particulier, si une figure est anallagmatique par rapport aux deux premières inversions, on voit que l'inversion définie par la sphère (S_1) la changera en une surface qui sera la symétrique de la première par rapport au plan radical des sphères (S), (S').

Cette proposition entraîne évidemment les propriétés des *pôles secondaires*. J'ajoute que, si, au lieu de l'inversion définie par (S_1), on prend celle qui est définie par la sphère concentrique et orthogonale, elle donnera une surface symétrique de la première par rapport à la ligne des centres des deux sphères primitives (S), (S').

Une cyclide qui a cinq pôles principaux a évidemment des

pôles secondaires, qui sont les pieds des hauteurs des cinq tétraèdres qu'on peut former avec quatre des cinq points.

Les cinq inversions définies par cinq sphères deux à deux orthogonales se détruisent ; leur effet est nul sur une figure quelconque.

Supposons, en effet, que trois des cinq sphères se réduisent à des plans rectangulaires Q_1, Q_2, Q_3. Les deux autres S_1, S'_1 auront pour centres le point de rencontre de ces plans, et les carrés de leurs rayons seront égaux et de signes contraires. Or, d'après la formule (3), on a

$$S_1 = Q_1 Q_2 Q_3 S'_1,$$

ou

$$S_1 S'_1 Q_1 Q_2 Q_3 = 1.$$

On passera de ce cas particulier au cas général par une inversion quelconque effectuée sur l'ensemble de la figure [1].

---

[1] On pourrait, en suivant les méthodes indiquées ici, étendre aux inversions les propositions relatives à la symétrie. Par exemple, si deux inversions effectuées sur une figure algébrique la laissent invariable, les sphères définissant ces deux inversions font un angle commensurable.

Note VII.

Sur les différentes transformations par lesquelles on peut déduire du tore la cyclide de M. Dupin.

Nous avons vu (art. 58) que la cyclide de M. Dupin a quatre points coniques disposés par couples aa', bb', et tels que les points de chaque couple soient à une distance nulle de ceux du second. Les points d'un même couple sont ceux par lesquels passent les sphères inscrites d'une même série. Ils sont réels, ou imaginaires conjugués. Il est clair que les deux couples aa', bb' ne peuvent être réels tous les deux.

Pour que la cyclide soit transformée en un tore par une inversion, il est nécessaire que les sphères d'une même série soient transformées en sphères ayant leurs centres en ligne droite, et il suffit, pour obtenir ce résultat, que l'inversion employée rejette à l'infini deux points doubles conjugués, par exemple a, a'. Le pôle de l'inversion doit donc être sur le cercle lieu des points à une distance nulle de a et de a'. Ainsi,

Le lieu des pôles des inversions transformant la cyclide en tore se compose de deux cercles, intersections des points sphères a, a' et b, b'.

L'un au moins des deux couples aa', bb' étant formé de points imaginaires conjugués, l'un au moins des cercles sera réel. Les deux le seront, quand les quatre points doubles seront imaginaires. Ces deux cercles passent d'ailleurs l'un par aa', l'autre par bb'. Ils sont dans les plans des deux coniques focales, lieux des centres des sphères inscrites, et tangents en bb', aa' respectivement à ces focales.

On peut obtenir les résultats précédents d'une manière plus

élémentaire, en remarquant que la cyclide peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères fixes. Si l'on peut transformer par une inversion ces trois sphères fixes soit en sphères ayant leurs centres en ligne droite, soit en sphères égales, la cyclide se changera en un tore. Nous allons retrouver ainsi les inversions indiquées par M. Mannheim dans son étude sur la cyclide, et nous examinerons dans quel cas elles sont réelles.

Étant données trois sphères (S), (S′), (S″), les pôles des inversions qui les transforment en sphères ayant leurs centres en ligne droite sont sur le cercle orthogonal des trois sphères. Ce cercle sera imaginaire, si les trois sphères se coupent en deux points.

Cherchons maintenant les pôles des inversions qui transforment les sphères en trois sphères égales.

Considérons les deux premières que nous appellerons (S) et (S′). Si des centres de similitude comme centres on décrit des sphères passant par l'intersection des deux premières, ces sphères bissectent les angles formés par les deux sphères données. Il suffit de se rappeler, pour reconnaître ce fait, que toute droite passant par un centre de similitude de (S) et de (S′) coupe ces deux sphères sous des angles égaux.

Les deux sphères bissectrices que nous venons de trouver conservent évidemment leur propriété quand on soumet la figure à une inversion, et l'une d'elles ne deviendra un plan que si les deux sphères (S), (S′) sont changées en sphères égales. Donc

Le lieu des pôles des inversions transformant deux sphères en sphères égales se compose de deux sphères passant par l'intersection des deux premières, bissectant leur angle, et ayant pour centres leurs centres de similitude.

En appelant S, S′ les puissances d'un point par rapport aux sphères données, les deux sphères bissectrices ont pour équations

$$\frac{S}{R} = \pm \frac{S'}{R'},$$

R et R′ étant les deux rayons. Si ces rayons ont un signe, comme cela arrive dans les problèmes de contact, et en particulier dans celui qui nous occupe, le lieu se compose d'une seule de ces sphères.

Considérons maintenant trois sphères (S), (S′), (S″). Ces sphères, prises deux à deux, donneront lieu à trois sphères bissectrices, ayant leurs centres sur l'axe de similitude des trois sphères données, et passant par les cercles d'intersection de ces sphères. Ces trois sphères bissectrices couperont donc à angles droits le cercle orthogonal des trois premières (S), (S′), (S″), et elles se couperont suivant un cercle, intersection des deux sphères de rayon nul dont les centres sont situés à la fois sur le cercle orthogonal et sur l'axe de similitude.

Donc *le lieu des pôles des inversions transformant trois sphères dont les rayons sont affectés de signes en trois sphères de rayons égaux et de mêmes signes est un cercle, intersection de deux points-sphères situés à la fois sur l'axe de similitude et sur le cercle orthogonal des trois proposées*

On voit que ce cercle sera réel, toutes les fois que le cercle orthogonal sera imaginaire ou ne coupera pas l'axe de similitude.

Nous avons par conséquent deux inversions transformant la cyclide en tore, celle qui remplace les sphères proposées par trois sphères ayant leurs centres en ligne droite, et celle qui les transforme en sphères égales. De ces deux inversions, une au moins sera toujours réelle; car, si le cercle orthogonal devient imaginaire, la première ne pourra être employée, mais la seconde sera certainement réelle. La cyclide est donc, dans tous les cas, la transformée du tore par une inversion réelle.

Dans une étude plus complète que celle-ci sur la cyclide, il serait utile de remarquer une relation de réciprocité à laquelle elle donne lieu.

En général, la polaire réciproque d'une cyclide est une surface du quatrième ordre, ayant une conique double,

quatre points coniques; en un mot, c'est la transformée homographique d'une cyclide à quatre points doubles. *Mais on peut choisir la quadrique de telle manière que la cyclide ait pour polaire réciproque une cyclide.* En effet, considérons la sphère (S), passant par les quatre points coniques a, a', b, b' de la cyclide, et qui coupe la déférente (A) correspondante suivant les quatre droites ab, ab', $a'b$, $a'b'$. Les plans tangents doubles de la cyclide passeront par le centre de (S), et envelopperont un cône (D) supplémentaire du cône asymptote de (A). Or, il existe comme on sait, quatre séries de quadriques homothétiques, ayant pour centre commun le sommet du cône (D), et transformant ce cône dans le cercle de l'infini. La polaire réciproque de la cyclide par rapport à une de ces quadriques sera évidemment encore une cyclide.

Dans cette transformation par polaires réciproques, aux quatre points coniques correspondent les quatre plans tangents singuliers, aux cercles d'une des surfaces, les cônes de révolution circonscrits suivant les cercles de la polaire réciproque, etc. Les quadriques qui servent de base à la transformation ne sont réelles que si la cyclide a deux points doubles réels. La propriété que nous venons de signaler nous paraît néanmoins présenter quelque intérêt, parce qu'elle met en évidence les relations de dualité auxquelles donne lieu la cyclide de M. Dupin.

Note VIII.

De la transformation par rayons vecteurs réciproques des surfaces anallagmatiques.

I.

Une surface anallagmatique (Σ) peut être définie comme l'enveloppe d'une suite de sphères qui demeurent orthogonales à une sphère fixe (S), que nous avons appelée *sphère directrice*.

Si l'on soumet la surface à une inversion, les sphères doublement tangentes à l'anallagmatique (Σ) se changent en de nouvelles sphères orthogonales à la sphère (S′) inverse de (S). L'inverse de l'anallagmatique (Σ) sera donc une anallagmatique (Σ′), ayant pour sphère directrice la sphère (S′) inverse de (S). Il y a ici un problème à étudier. Quelle relation y a-t-il entre les deux déférentes (B), (B′) des anallagmatiques (Σ), (Σ′)? Nous allons montrer que ces deux déférentes sont homologiques.

A cet effet, soit O_1 le pôle et (S_1) la sphère de l'inversion à laquelle on soumet (Σ). Deux sphères de centres p, q, et tangentes à (Σ), se transformeront par l'inversion en deux sphères tangentes à (Σ′), de centres p', q'. Les droites pp', qq' iront évidemment passer par le pôle O_1. Donc les deux déférentes (B), (B′) se correspondent point par point, de telle manière que les droites joignant les points correspondants pp', qq' aillent concourir au pôle O_1. Je dis maintenant que les droites pq, $p'q'$ se coupent en un point situé dans un plan fixe (P), le plan radical commun de (S), (S′) et (S_1).

En effet, par l'intersection des deux sphères tangentes à (Σ) et de centres p, q, faisons passer une sphère orthogonale à (S_1). Cette sphère sera aussi orthogonale à (S); elle aura donc son centre dans le plan radical (P) de (S), (S′) et (S_1).

Comme elle est orthogonale à (S_1), l'inversion la transformera en elle-même, et elle contiendra par conséquent le cercle d'intersection des deux sphères de centres p', q'. tangentes à (Σ'). Son centre sera donc aussi sur la droite $p'q'$, et sera l'intersection de pq et $p'q'$. Comme ce centre est dans le plan radical (P) de (S) et de (S_1), la proposition est démontrée.

Ainsi les deux déférentes se correspondent de manière que les droites pp' joignant deux points correspondants aillent passer par un point fixe O_1, et de telle manière que les droites pq d'une figure aillent couper les droites correspondantes $p'q'$ de l'autre en des points situés dans un plan fixe (P). Les déférentes sont donc homologiques; (P) et (O_1) sont le plan et le centre d'homologie. Donc,

Si l'on soumet une anallagmatique (Σ) *à une inversion définie par la sphère* (S_1) *de centre* O_1, *elle se change en une anallagmatique* (Σ). *Les sphères directrices des deux anallagmatiques sont inverses l'une de l'autre par rapport à* (S_1). *Les déférentes sont homologiques,* O *étant le centre d'homologie, et le plan d'homologie étant le plan radical commun à* (S_1) *et aux deux sphères directrices de* (Σ) *et* (Σ_1) [1].

Ce beau théorème est dû à M. de la Gournerie, qui l'a énoncé pour les anallagmatiques planes dans le Mémoire déjà cité. Il devient illusoire dans le cas suivant :

Si l'on soumet (Σ) à une inversion transformant sa sphère directrice en un plan (P), l'anallagmatique se change en une surface (Σ'), symétrique par rapport au plan (P). Les sphères doublement tangentes se changent en sphères ayant leur centre dans le plan (P), mais dont le rayon n'est plus défini.

---

[1] On peut ajouter que les deux sphères directrices sont aussi homologiques avec le même centre et le même plan d'homologie. Il résulte de cette remarque, par exemple, que les polaires réciproques des déférentes par rapport aux sphères directrices sont aussi homologiques. De plus, puisque les deux sphères directrices sont correspondantes, on connaîtra, en même temps que le centre et le plan d'homologie, le rapport ou module d'homologie.

Nous allons donner des règles simples relatives à ce cas particulier.

II.

Arrivons à l'examen du cas singulier dans lequel l'inversion change l'anallagmatique (Σ) en une surface (Σ') ayant un plan de symétrie. Les sphères tangentes à l'anallagmatique (Σ) se changent en sphères ayant leur centre dans le plan de symétrie, et dont le rayon ne peut plus être déterminé. Les remarques suivantes vont nous permettre de déterminer ces rayons.

Soit, pour plus de simplicité, une cyclide (K) ayant pour déférente la quadrique (B), et pour directrice la sphère (S). Soit (B_1) la polaire réciproque de (B) par rapport à (S). La cyclide (K_1) ayant (B_1) pour déférente correspondra point par point à (K), et les lignes de courbure des deux surfaces seront correspondantes (Note V). Remarquons d'ailleurs que chacune d'elles aura pour focale la section de l'autre par la sphère directrice. Cette relation se conserve si l'on transforme par inversion; et, si les deux cyclides sont changées en cyclides à plans de symétrie, la focale de chacune d'elles sera la section principale de l'autre.

Nous avons donc le théorème suivant :

Étant donnée une cyclide (K) *à plan de symétrie, les sphères doublement tangentes ayant leur centre dans le plan de symétrie peuvent être définies par la propriété suivante : Les sphères de rayon nul passant par leur intersection avec le plan de symétrie décrivent une cyclide* (K_1), *ayant pour focale la section principale, et pour section principale la focale de la première. Les lignes de courbure des deux cyclides* (K), (K_1) *sont des lignes correspondantes.*

Note IX.

Des surfaces qui demeurent invariables quand on les transforme par polaires réciproques, et des méthodes de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure.

I.

Une grande partie de ce travail a été consacrée à l'examen des propriétés des surfaces qui demeurent invariables par une inversion convenablement choisie.

La méthode que nous avons suivie peut servir de guide dans l'étude d'une question plus générale qu'on peut énoncer ainsi :

Trouver les surfaces qui demeurent invariables quand on les soumet à une transformation d'une nature déterminée.

A cet effet, on cherchera les surfaces les plus simples satisfaisant à la condition précédente, et contenant au moins trois paramètres; les surfaces les plus générales répondant à la question pourront être engendrées comme enveloppes des précédentes.

C'est ainsi que, si l'on veut trouver toutes les surfaces qu'une inversion laisse invariables, on remarque que les sphères orthogonales à la sphère d'inversion satisfont à cette condition, et les surfaces anallagmatiques générales sont les enveloppes d'une série simple ou double de ces sphères.

Nous allons ici traiter une question de ce genre, et examiner comment on peut engendrer toutes les surfaces qui coïncident avec leur polaire réciproque par rapport à une quadrique (S). Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que cette quadrique soit une sphère, et nous allons d'abord examiner s'il existe des quadriques qui soient leurs propres polaires réciproques.

Soient (Q) l'une de ces quadriques, et (Q') sa polaire réci-

proque. On sait que (Q′) contient la courbe de contact avec (S) de la développable $\overline{(Q)\ (S)}$. Cette courbe de contact doit donc appartenir aussi à (Q), et par suite (Q) doit être une surface de révolution inscrite dans la sphère.

Cette condition est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. Car soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)-K(xx'+yy'+zz'-R^2)^2\\&\qquad=0\end{aligned}\right.$$

l'équation d'une surface de révolution inscrite dans (S). La surface polaire réciproque sera bien inscrite suivant la même courbe; elle aura pour équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2-R^2)(x'^2+y'^2+z'^2-R^2)-K'(xx'+yy'+zz'-R^2)^2\\&\qquad=0,\end{aligned}\right.$$

où

$$(3)\qquad (1-K)(1-K')=1;$$

mais elle ne coïncidera pas avec la première. Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait

$$(4)\qquad K=2.$$

Si l'on se reporte à l'équation (1), on voit que (x', y', z') est le pôle du plan de contact ou d'inscription; nous l'appellerons, avec M. Cayley, *centre d'inscription*. D'un autre côté la formule (2) de la Note V nous montre que, dans la géométrie de M. Cayley, la distance Θ d'un point quelconque (x, y, z) de la surface au centre (x', y', z') est constante, et donnée par la formule

$$(5)\qquad \cos^2\Theta=\frac{1}{K}\cdot$$

Nous appellerons Θ le rayon d'inscription, et nous voyons que les surfaces inscrites précédentes jouent dans la géométrie de M. Cayley le même rôle que la sphère dans la géométrie ordinaire. On reconnaîtra sans difficulté que le plan tangent

en tout point de la surface est normal au rayon qui passe au point de contact.

Les surfaces précédentes ont même des propriétés plus étendues que la sphère, qui les rapprochent des petits cercles dans la géométrie sphérique. Elles sont l'enveloppe du plan qui fait avec le plan d'inscription un angle constant Ω, défini par la formule

$$\cos^2 \Omega = \frac{1}{K'} \cdot \tag{6}$$

On peut appeler cet angle, angle d'inscription; il est complémentaire de θ.

Avec ces définitions, le résultat que nous avons trouvé peut s'énoncer ainsi :

Les seules quadriques coïncidant avec leur polaire réciproque sont celles qui sont inscrites, et dont le rayon ou l'angle d'inscription est égal à $\frac{\pi}{4}$.

Cela posé, soit une surface (Σ), qui coïncide avec sa polaire réciproque. A tout point m correspondra un plan polaire tangent en m' à la surface, et le plan polaire de m' sera tangent en m. D'après cela, si l'on construit une quadrique inscrite de la définition précédente, tangente à (Σ) en m, cette quadrique sera aussi tangente en m' à (Σ). Donc

Toute surface identique à sa polaire réciproque est l'enveloppe d'une série de quadriques inscrites dans (S) *avec un rayon égal à $\frac{\pi}{4}$, et dont le centre d'inscription décrit soit une ligne, soit une surface.*

Si, au lieu de supposer que le rayon d'inscription soit égal à $\frac{\pi}{4}$, nous admettons qu'il a une valeur constante, mais quelconque, nous obtenons des surfaces remarquables, enveloppes de toutes ces quadriques inscrites de rayon constant. Elles sont tout à fait analogues aux surfaces parallèles dans la géométrie ordinaire, et donnent lieu aux propriétés suivantes.

Soit (H) une surface quelconque, et supposons que, de ses différents points comme centres, on décrive des quadriques inscrites dans la sphère (S) et de même rayon θ. Ces quadriques enveloppent une surface (H_1), que l'on construira comme il suit. Soit M un point de cette surface; il peut être considéré comme l'intersection de trois quadriques infiniment voisines, de centres infiniment voisins m, m', m''. Ces trois centres étant à la même distance du point M, le plan $mm'm''$, tangent en m à (H), à la limite sera normal à la droite Mm. On aura donc la construction suivante.

Sur chaque normale à (H) en un point P, on portera, dans les deux sens, une longueur constante égale à θ, ce qui donnera les deux points P_1, P_2, qui seront des points de la surface parallèle (H_1). Les deux plans tangents à cette surface en P_1, P_2 seront normaux à la droite PP_1P_2; ils iront se couper, par conséquent, suivant la polaire de cette droite, ou seconde normale de (H) en P, située dans le plan tangent à (H). De plus, ils feront des angles égaux et constants avec le plan tangent à (H) en P.

Ce sont exactement les propriétés des courbes parallèles sur la sphère. Dans la géométrie cayleyenne comme dans la géométrie ordinaire, les normales d'une surface sont normales aux surfaces parallèles, et par conséquent les lignes de courbure se correspondent point par point sur les deux surfaces parallèles.

La polaire réciproque (H') de (H) peut être considérée comme parallèle à (H); car un point est à une distance constante égale à un quadrant de tous les points de son plan polaire, et par conséquent la polaire réciproque d'une surface donnée sera la surface parallèle menée à la distance d'un quadrant.

On voit que la surface parallèle menée à la distance de $\frac{\pi}{4}$ se composera de deux nappes conjuguées, qui seront à une distance d'un quadrant l'une de l'autre, et par conséquent seront polaires réciproques l'une de l'autre. La droite qui

joindra deux points correspondants sur les deux nappes sera normale commune aux deux nappes.

Plus généralement, deux surfaces parallèles se succédant à une distance d'un quadrant seront polaires réciproques l'une de l'autre.

II.

Nous allons maintenant montrer comment les propositions précédentes conduisent, dans la géométrie ordinaire, à une méthode de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure ordinaires, plus générale que celle qui a été développée dans la Note V.

Rappelons d'abord que, si l'on prend pour déférente une quadrique (V) inscrite dans la sphère, l'anallagmatique correspondante se compose (art. 59) de deux sphères passant par la ligne de contact de la quadrique (V), et ayant pour centres les deux foyers de cette quadrique. Ces deux sphères coupent sous un même angle φ la sphère directrice (S), et si θ est le rayon d'inscription de la quadrique, on trouve sans difficulté

$$\cos\varphi = \frac{i\sin\theta}{\cos\theta}. \tag{7}$$

φ demeure donc constant pour toutes les quadriques inscrites de même rayon.

Cela posé, considérons une surface (B) et les surfaces parallèles par rapport à (S), (B_1), (B_2), ... Les lignes de courbure se correspondant sur ces différentes surfaces, si on les prend comme déférentes, les anallagmatiques (Σ), (Σ_1), (Σ_2), ..., ainsi obtenues, se correspondront point par point avec conservation des lignes de courbure ordinaires. Voyons comment on peut définir cette correspondance.

La surface (B_i) parallèle à (B) est l'enveloppe d'une suite de quadriques (V_i) inscrites, de rayon constant, ayant leur centre d'inscription sur (B), et dont les plans d'inscription enveloppent par conséquent la polaire réciproque (B') de (B).

La surface (Σ_i) ayant (B_i) pour déférente sera donc l'enveloppe des couples de sphères correspondantes aux quadriques (V_i) de rayon constant. D'après la remarque précédente, ces sphères coupent la sphère directrice (S) sous un angle constant. Donc,

Étant donnée une surface quelconque (B'), on lui mène des plans tangents, et par leurs intersections avec une sphère fixe (S) on fait passer des sphères coupant (S) sous un angle arbitraire, mais constant α. Soit (Σ_α) la surface enveloppe de ces sphères. Deux surfaces (Σ_α), (Σ_β), obtenues en attribuant à l'angle constant les valeurs α, β, se correspondent point par point avec conservation des lignes de courbure.

Les points correspondants sur les différentes surfaces sont à l'intersection d'un cercle orthogonal à (S), et les coupant toutes à angle droit.

Cette transformation comprend comme cas particulier celle qui a été donnée dans la Note V. Si l'on prend, en effet, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on obtient l'anallagmatique ayant pour déférente la polaire réciproque (B) de (B'). Si l'on fait $\alpha = \infty$, on obtient les points sphères passant par l'intersection de (S) et des plans tangents à (B'), c'est-à-dire l'anallagmatique ayant (B') pour déférente. On a donc les deux anallagmatiques ayant pour déférentes deux surfaces (B), (B'), polaires réciproques par rapport à (S). C'est la transformation de la Note V.

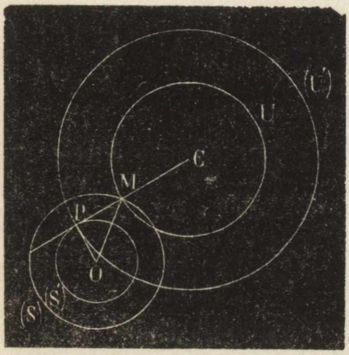
En réunissant les résultats qui précèdent, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une surface* (Σ), *on lui adjoint une sphère fixe* (S), *et l'on construit toutes les sphères tangentes à la surface et coupant* (S) *sous un angle constant* α. *Par l'intersection de chacune de ces sphères et de* (S), *on fait passer de nouvelles sphères coupant* (S) *sous un angle* β. *Ces nouvelles sphères enveloppent une surface* (Σ_1), *correspondante point par point à* (Σ), *avec conservation des lignes de courbure.

Les points correspondants sur les deux surfaces sont sur des

cercles normaux à la fois aux deux surfaces et à la sphère (S) (¹).

Nous rencontrons ici des surfaces enveloppes de sphères variables, coupant une sphère fixe (S) sous un angle constant. On ramène leur étude à celle des anallagmatiques ordinaires par la remarque suivante. Soit O le centre de la sphère (S), et C le centre d'une sphère variable (U), coupant (S) sous un angle constant α. Cet angle α est égal à $\widehat{CMO}$, et l'on voit que la sphère (U') de rayon CP coupe la sphère (S') de rayon OP à angles droits. Or $OP = OM \sin\alpha$ est évidemment constant; la sphère (S') est donc invariable. Quant à la sphère (U'), elle a même centre que (U); mais son rayon diffère de celui de (U) d'une quantité constante $PM = OM \cos\alpha$. Les sphères (U) et (U') envelopperont, par conséquent, des surfaces parallèles. Donc



La surface enveloppe des sphères coupant sous un angle constant une sphère (S) *est parallèle à une surface enveloppe de sphères concentriques aux premières, et coupant à angle droit une sphère fixe* (S') *concentrique à* (S).

(¹) Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante.

Considérons une surface (Σ) enveloppe d'une série de sphères variables (U), coupant sous des angles quelconques la sphère (S). A chacune des sphères (U) coupant (S) sous l'angle φ, on fait correspondre une sphère (U_1), passant par l'intersection de (S) et de (U), et coupant (S) sous un angle φ_1 déterminé par l'équation

$$\frac{\cos\varphi - \cos\varphi_1}{1 - \cos\varphi \cos\varphi} = \alpha .$$

Alors les nouvelles sphères (U_1) enveloppent une surface (Σ_1), qui correspond point par point à (Σ) avec conservation des lignes de courbure. Quand φ reste constant, il en est de même de φ_1, et l'on retrouve le théorème donné dans le texte.

Note X.

Sur un nouveau système de coordonnées et son application à la théorie des cyclides.

I.

Dans la *Quatrième Partie* de ce travail, nous avons été conduit à un nouveau système de détermination des points de l'espace, dont l'étude paraît présenter de grands avantages dans la théorie des cyclides. Les cinq quantités S_i définies dans l'article 49, et qui sont les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales, peuvent être considérées comme des coordonnées d'une nature particulière; mais elles sont en nombre plus que suffisant, et l'on peut les étudier sous deux points de vue essentiellement distincts.

D'abord, les coordonnées S_i, étant au nombre de cinq, ne sont pas indépendantes les unes des autres, et il doit y avoir entre elles deux relations. On trouve, en effet, qu'elles satisfont aux équations

$$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0, \quad \sum \frac{S_i}{R_i^2} = -2,$$

qui se déduisent immédiatement des formules de l'article 48. On voit donc, comme cela doit être, que trois seulement des coordonnées S_i peuvent être choisies arbitrairement; les deux autres seront alors déterminées par les équations précédentes.

Mais on peut aussi déterminer un point, non plus par les cinq coordonnées S_i, mais simplement par les rapports mutuels de ces cinq quantités. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_5$ des nombres

proportionnels à $S_1, S_2, \ldots, S_5$. On aura, pour déterminer le point, les équations

$$\frac{S_1}{k_1} = \frac{S_2}{k_2} = \cdots = \frac{S_5}{k_5},$$

ou

$$S_i = \rho k_i,$$

ρ étant une arbitraire inconnue. Les quantités k_i devront satisfaire à l'unique relation

$$\sum \left(\frac{k_i}{R_i}\right)^2 = 0,$$

et, quand on connaîtra les nombres k_i, ρ sera déterminé par l'équation

$$\sum \frac{S_i}{R_i^2} = \rho \sum \frac{k_i}{R_i^2} = -2.$$

Nous adopterons cette seconde manière de déterminer les points, et nous aurons un système de cinq coordonnées homogènes, liées par une seule relation, du second degré par rapport aux coordonnées. Nous allons, du reste, pour donner à notre système de coordonnées toute la généralité qu'il comporte, rattacher le mode de détermination des points dans ce système à celui des sphères et des plans. Nous commençons en rappelant quelques propositions déjà établies.

Soient cinq sphères (S_i), deux à deux orthogonales, et définies par les équations

(1) $$S_i = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_i x - 2\beta_i y - 2\gamma_i z + \delta_i = 0.$$

Le rayon R_i de chacune d'elles est donné par la formule

(2) $$R_j^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - \delta_i,$$

et, en exprimant qu'elles sont orthogonales, nous obtenons les équations de condition

(3) $$\delta_i + \delta_i = 2\alpha_i\alpha_j + 2\beta_i\beta_j + 2\gamma_i\gamma_j.$$

Nous avons vu (art. 48) qu'on a entre les cinq quantités S_i la relation identique

(4) $$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0,$$

qui conduit aux équations données dans l'article cité,

$$(5) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{1}{R_i}\right)^2 = 0, \quad \sum \frac{\alpha_i}{R_i^2} = 0, \quad \sum \frac{\alpha_i \beta_i}{R_i^2} = 0, \\ \sum \frac{\alpha_i \delta_i}{R_i^2} = 0, \quad \sum \frac{\delta_i}{R_i^2} = -2, \quad \sum \frac{\alpha_i^2}{R_i^2} = 1, \ldots \end{cases}$$

Cela posé, l'équation de toute sphère (S) peut évidemment se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \sum m_i \frac{S_i}{R_i} = 0 ;$$

car cette équation contient cinq paramètres variables, les quantités m_i ; les rapports mutuels de ces cinq quantités peuvent donc servir à déterminer une sphère ; ce sont, en quelque sorte, les coordonnées d'une sphère, et il importe de rechercher d'abord leur signification géométrique.

A cet effet, nous supposerons que l'on remplace dans l'équation (6) les quantités S_i par leurs expressions x, y, z. On aura une identité de la forme

$$\sum m_i \frac{S_i}{R_i} = K(x^2 + y^2 + z^2) - 2Ax - 2By - 2Cz + D.$$

L'équation de la sphère (S) en coordonnées ordinaires sera donc

$$K(x^2 + y^2 + z^2) - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0,$$

et l'on aura

$$(7) \quad \begin{cases} K = \sum \frac{m_i}{R_i}, & A = \sum \frac{\alpha_i m_i}{R_i}, \\ D = \sum \frac{\delta_i m_i}{R_i}, & B = \sum \frac{\beta_i m_i}{R_i}, \\ & C = \sum \frac{\gamma_i m_i}{R_i}. \end{cases}$$

Grâce aux identités (5), on peut résoudre ces dernières équations par rapport à m_i, et l'on trouve ainsi

$$(8) \quad m_i = -\frac{1}{2R_i}\left[K(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2) - 2A\alpha_i - 2B\beta_i - 2C\gamma_i + D - KR_i^2\right].$$

Soient O le centre de (S) et R son rayon.

Appelons P_i la puissance du centre C_i (α_i, β_i, γ_i) de (S_i) par rapport à (S) ; l'équation (8) pourra s'écrire

$$(9) \qquad m_i = -\frac{K}{2R_i}(P_i - R_i^2) = -\frac{K}{2R_i}\left(\overline{O_iC_i}^2 - R^2 - R_i^2\right).$$

L'expression entre parenthèses est un invariant remarquable de (S) et de (S_i), le carré de la distance des centres moins la somme des carrés des rayons. Il s'annule quand les deux sphères sont orthogonales. Nous l'appellerons ***puissance commune*** des deux sphères.

Donc les cinq coordonnées m_i, qui déterminent dans notre système une sphère variable (S), sont proportionnelles aux puissances communes de (S) et de chacune des sphères (S_i), divisées par le rayon R_i de la sphère (S_i).

On voit que *la coordonnée m_i ne s'annule que dans le cas où la sphère* (S) *est orthogonale à la sphère* (S_i).

Par exemple, l'équation

$$m_1\frac{S_1}{R_1} + m_2\frac{S_2}{R_2} + m_3\frac{S_3}{R_3} = 0$$

représente toute sphère orthogonale à (S_4) et à (S_5).

Cherchons le rayon R de la sphère (S) en fonction des coordonnées m_i. On a, d'après les identités (7),

$$(10) \qquad A^2 + B^2 + C^2 - DK = \sum m_i^2.$$

Le premier membre de cette équation est égal à R^2K^2 ; on a donc

$$(11) \qquad R^2 = \frac{1}{K^2}\sum m_i^2 = \frac{\sum m_i^2}{\left(\sum \frac{m_i}{R_i}\right)^2}.$$

Dans le cas où la sphère variable se réduit à un point M, les cinq quantités m_i deviennent les puissances divisées par R_i du point M par rapport aux cinq sphères orthogonales. En appelant S_i ces puissances, on obtient

$$m_i = \frac{S_i}{R_i},$$

et, comme R est nul dans ce cas, on a

$$\sum m_i^2 = 0 , \tag{12}$$

ou

$$\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0 ,$$

c'est-à-dire l'identité qui a été notre point de départ, ce qui sert de vérification à nos calculs.

D'autre part, la sphère se réduit à un plan (P), si l'on a

$$K = \sum \frac{m_i}{R_i} = 0 . \tag{13}$$

Les plans de l'espace sont donc déterminés par cinq quantités m_i, et ces coordonnées satisfont à l'équation linéaire (13).

Dans ce cas, la formule (8) devient

$$m_i = \frac{1}{2R_i}\left[2A\alpha_i + 2B\beta_i + 2C\gamma_i - D\right] .$$

et, comme l'équation du plan (P) est

$$2Ax + 2By + 2Cz - D = 0 ,$$

on voit que les cinq coordonnées m_i sont proportionnelles aux distances divisées par R_i des centres des cinq sphères (S_i) au plan (P).

Il suit de là que le système actuel de coordonnées, quand il est employé à la détermination des plans, est *un système de coordonnées tangentielles surabondantes*. Si, au moyen de l'identité (13), on élimine une des quantités m_i, m_1 par exemple, d'une équation, il restera une relation homogène entre m_2, m_3, m_4, m_5, qui sera l'équation tangentielle de la surface enveloppe de tous les plans, rapportée au tétraèdre des centres des sphères (S_2), (S_3), (S_4), (S_5).

En résumé, notre système de coordonnées embrasse à la fois les points, les plans et les sphères. Les cinq quantités m_i déterminent en général une sphère. Pour qu'elles conviennent à un plan, il faut qu'elles satisfassent à une équation linéaire (13);

pour qu'elles déterminent un point, il faut qu'elles satisfassent à l'équation quadratique (12).

Si elles satisfont à la fois aux équations (12) et (13), elles déterminent un plan tangent au cercle de l'infini.

Enfin, toutes les fois que l'une des coordonnées m_i est nulle, la sphère ou le plan deviennent orthogonaux à (S_i), ou, si la sphère se réduit à un point, ce point se trouve sur (S_i).

Nous signalerons encore une propriété importante des quantités m_i. Si l'on place la masse m_i au centre C_i de chacune des sphères (S_i), d'après les formules (7), le centre de gravité des cinq masses sera le centre de la sphère (S). Cette propriété ne suffit pas évidemment à faire connaître les cinq quantités, mais elle constitue une relation importante, et dont nous aurons à faire usage.

II.

Étant données deux sphères (S) et (S') par leurs équations

$$(14)\quad S = \sum m_i \frac{S_i}{R_i} = K(x^2+y^2+z^2) - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0,$$

$$(15)\quad S' = \sum m'_i \frac{S_i}{R_i} = K'(x^2+y^2+z^2) - 2A'x - 2B'y - 2C'z + D' = 0,$$

on peut combiner ces équations de manière à obtenir la suivante

$$S + \lambda S' = \sum (m_i + \lambda m)'_i \frac{S_i}{R_i},$$

et, en appliquant alors la formule (10), on aura

$$(A+\lambda A')^2 + (B+\lambda B')^2 + (C+\lambda C')^2 - (D+\lambda D')(K+\lambda K')$$
$$= \sum (m_i + \lambda m'_i)^2 .$$

En égalant les coefficients de λ dans les deux membres, on obtient la relation

$$(16)\qquad 2AA' + 2BB' + 2CC' - DK' - D'K = 2\sum m\, m' .$$

Si nous désignons par x, y, z, x', y', z' les coordonnées des centres de (S) et de (S'), et par R et R' leurs rayons, l'équation (16) pourra s'écrire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-R^2-R'^2\\ &=-2\frac{\sum m_i m'_i}{KK'}=\frac{-2\sum m_i m'_i}{\sum\frac{m_i}{R_i}\sum\frac{m'_i}{R_i}}.\end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette formule est la puissance commune de (S) et de (S'), qui se trouve ainsi exprimée en fonction des m_i, m'_i.

La condition pour que les deux sphères soient orthogonales est donc

$$(18)\qquad \sum m_i m'_i = 0 .$$

La formule (17) prend une forme élégante, si l'on suppose que les deux sphères (S), (S') soient réduites à des points. Alors on a

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i = 0 ,$$

et l'on peut écrire cette formule

$$(19)\qquad (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\frac{\sum(m_i-m'_i)^2}{\sum\frac{m_i}{R_i}\sum\frac{m'_i}{R_i}} .$$

Telle est l'expression de la distance de deux points. S'ils deviennent infiniment voisins, on a

$$(20)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=\frac{\sum dm_i^2}{\left(\sum\frac{m_i}{R_i}\right)^2}$$

Cherchons ce que peut représenter le second membre de la formule (19), quand on a, non des points, mais de véritables sphères (S), (S').

On a alors

$$R^2 = \frac{\sum m_i^2}{\left(\sum \frac{m_i}{R_i}\right)^2}; \qquad R'^2 = \frac{\sum m'^2_i}{\left(\sum \frac{m'_i}{R_i}\right)^2}.$$

D'ailleurs, puisque les coordonnées sont homogènes, on peut toujours supposer que

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i,$$

et par suite on aura

$$2RR' = \frac{\sum m_i^2 + \sum m'^2_i}{\sum \frac{m_i}{R_i} \sum \frac{m'_i}{R_i}},$$

et, en ajoutant cette équation membre à membre à (17),

$$(21)\quad (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (R-R')^2 = \frac{\sum (m_i - m'_i)^2}{\sum \frac{m_i}{R_i} \sum \frac{m'_i}{R_i}}.$$

On aurait de même

$$(22)\quad (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (R+R')^2 = \frac{-\sum (m_i + m'_i)^2}{\sum \frac{m_i}{R_i} \sum \frac{m'_i}{R_i}}.$$

Mais ces deux formules supposent essentiellement que

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i.$$

La condition de contact de deux sphères peut donc s'écrire, dans notre système et avec l'hypothèse précédente,

$$(23)\qquad \sum (m_i \pm m'_i)^2 = 0.$$

Si les deux sphères devenaient infiniment voisines, on aurait

$$(24) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 - dR^2 = \frac{\sum dm_i^2}{\left(\sum \frac{m_i}{R_i}\right)^2};$$

mais cette formule suppose essentiellement que, lorsque m_i varie, Σm_i^2 demeure constante.

D'après l'équation (24), la condition de contact de deux sphères infiniment voisines sera donc

$$(25) \qquad \sum dm_i^2 = 0 .$$

Les formules données ici peuvent être écrites d'une autre manière, qui met en évidence leur interprétation géométrique. Par exemple les équations (21) et (22), relatives à deux sphères et établies dans l'hypothèse que

$$\sum m_i^2 = \sum m'^2_i ,$$

deviennent, en appelant φ l'angle de ces sphères,

$$(26) \qquad 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\sum (m_i - m'_i)^2}{\sum m_i^2}, \quad 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\sum (m_i + m'_i)^2}{\sum m_i^2},$$

et par suite, en appelant V l'angle de deux sphères infiniment voisines, la formule (24) nous donne

$$(27) \qquad V^2 = \frac{\sum dm_i^2}{\sum m_i^2},$$

en supposant que Σm_i^2 demeure constante.

Les formules précédentes, ne contenant que des angles, s'appliquent au cas où les sphères se changent en des plans.

Une des propriétés les plus importantes du système pré-

cédent de coordonnées, c'est qu'il est en quelque sorte indifférent à la transformation par rayons vecteurs réciproques ou inversion.

C'est-à-dire que, si l'on soumet le système entier à une inversion, les cinq sphères (S_i) se changent en cinq nouvelles sphères (S'_i), et toute sphère, point ou plan (U), se change en une sphère (U'), qui a, par rapport aux (S'_i), les mêmes coordonnées que (U) par rapport aux (S_i). En d'autres termes, *on étudie, dans notre système de coordonnées et dans la même équation, en même temps qu'une figure, toutes ses transformées par la méthode des rayons vecteurs réciproques.*

Pour démontrer cette importante proposition, il suffit de remarquer que, grâce aux formules de l'inversion, les cinq quantités $\frac{S_i}{R_i}$ se changent, à un facteur près, dans les quantités analogues $\frac{S'_i}{R'_i}$, relatives aux sphères (S'_i) inverses des (S_i). On a

$$\frac{S_i}{R_i} = \lambda . \frac{S'_i}{R'_i},$$

et par suite l'équation

$$\sum m_i \frac{S_i}{R_i} = 0$$

de toute sphère (U) se change dans l'équation

$$\sum m_i \frac{S_i}{R_i} = 0$$

de la sphère (U') correspondante. Cette nouvelle sphère a donc, par rapport aux (S'_i), les mêmes coordonnées que la première (U) par rapport aux S_i. C'est ce qu'il fallait établir.

Toutefois, il peut arriver que l'une des sphères (S_i) soit changée en un plan. Alors il faudra remplacer $\frac{S_i}{R_i}$ par $2d_i$, d_i désignant la distance à ce plan.

Ainsi, les véritables coordonnées d'un point sont propor-

tionnelles aux quantités $\frac{S_i}{R_i}$ ou $2d_i$, si la sphère de base (S_i) devient un plan, et tout point sera déterminé par les cinq coordonnées homogènes

$$x_i = \lambda \frac{S_i}{R_i},$$

liées par l'équation

$$\sum x_i^2 = 0,$$

et invariables pour toute inversion plane ou sphérique.

III.

Le système actuel de coordonnées présente une propriété tout à fait singulière, et sur laquelle il importe que nous insistions.

D'abord, tous les points du plan de l'infini qui sont hors du cercle de l'infini ont les mêmes coordonnées, savoir

$$x_i = \frac{\lambda}{R_i}.$$

En effet, d'après la formule (9), les coordonnées d'un point quelconque O sont égales à

$$x_i = \frac{\lambda}{R_i}(OC_i^2 - R_i^2).$$

Si le point O s'éloigne indéfiniment sans avoir pour limite un point du cercle de l'infini, OC_i devient infini, et l'on trouve

$$x_i = \frac{\rho}{R_i}$$

Au contraire, si le point O s'éloigne à l'infini en s'approchant d'un point du cercle de l'infini, OC_i est indéterminé, et l'on a, à la limite,

$$R_i x_i = \lambda + \mu R_i^2,$$

où le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ peut prendre toutes les valeurs possibles. Les

points du cercle de l'infini ont donc une infinité de systèmes de coordonnées.

Les remarques suivantes expliquent ces propriétés si singulières de notre système de coordonnées.

Si l'on soumet les points de l'espace à une inversion, tous les points à l'infini en dehors du cercle de l'infini viennent se confondre au pôle A de l'inversion. Ils ont donc tous, d'après une remarque déjà faite, les mêmes coordonnées que ce pôle, après l'inversion.

Au contraire, à un point M sur le cercle de l'infini correspondent, après l'inversion, tous les points M′ situés sur la droite AM. Le point M doit donc être défini par tous les systèmes de coordonnées qui, après l'inversion, déterminent les différents points M′, en nombre infini sur la droite AM.

IV.

Faisons l'application des résultats précédents à quelques problèmes simples.

Soient deux sphères (S), (S′), définies par les équations

$$\sum m_i x_i = 0 , \qquad \sum m'_i x_i = 0 .$$

L'équation de toute sphère passant par leur intersection sera

$$\sum (m_i + \lambda m'_i) x_i = 0 . \tag{28}$$

L'une de ces sphères se réduira à un plan, le plan radical des deux premières. Elle correspond à la valeur de λ déterminée par l'équation

$$\sum \frac{m_i + \lambda m'_i}{R_i} = 0 . \tag{29}$$

Deux des sphères se réduisent à des points. Les valeurs de λ auxquelles elles correspondent sont déterminées par l'équation

$$\sum (m_i + \lambda m'_i)^2 = 0 ,$$

ou

$$\sum m_i^2 + 2\lambda \sum m_i m'_i + \lambda^2 \sum m'^2_i = 0 . \tag{30}$$

On sait que, lorsque cette équation a des racines égales, les deux sphères (S), (S′) sont tangentes; la condition de contact est donc

$$\left(\sum m_i m'_i\right)^2 - \left(\sum m_i^2\right)\left(\sum m'^2_i\right) = 0 . \tag{31}$$

Si l'on fait $\Sigma m_i^2 = \Sigma m'^2_i$, cette équation se décompose dans les deux conditions (22) déjà trouvées.

Si l'équation en λ est identique, les deux sphères se réduisent à des points, et ces points sont sur une droite allant rencontrer le cercle de l'infini.

On sait que, étant données des sphères passant par un même cercle, quatre de ces sphères donnent lieu à un rapport anharmonique, comme quatre plans, et ce rapport anharmonique est égal à celui des centres de ces sphères, situés en ligne droite. Il est clair que le rapport anharmonique de quatre sphères, déduites de l'équation (28) en donnant à λ quatre valeurs distinctes, sera le même que celui de ces valeurs de λ.

V.

Examinons maintenant une surface quelconque représentée par l'équation homogène

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5) = 0 , \tag{32}$$

que, pour abréger, nous écrirons

$$f(x_i) = 0 .$$

L'équation

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i\right) X_i = 0 , \tag{33}$$

où les x_i désignent les coordonnées d'un point M de la surface, et X_i les coordonnées c urantes, représente, quand on y fait

varier λ, une suite de sphères tangentes en M à la surface. Si l'on dispose de λ de telle manière que

$$\sum \frac{1}{R_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i\right) = 0,$$

alors l'équation (33) représente un plan; c'est le plan tangent à la surface au point M.

Toute sphère

$$(34) \qquad \sum m_i X_i = 0,$$

normale à la surface au point M, devra aussi être normale à toutes les sphères tangentes (33). On devra donc avoir, quel que soit λ,

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i\right) m_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum m_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \sum m_i x_i = 0.$$

Si l'on a, en outre,

$$\sum \frac{m_i}{R_i} = 0,$$

l'équation (34) représentera un plan normal. Tous les plans normaux passent donc par la droite

$$(35) \qquad \left(X_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}, x_i, \frac{1}{R_i}\right) = 0, (i = 1, 2, 3, 4, 5) \text{ [1]}.$$

Pour que le point (x_i) soit un point singulier de la surface, il faut que l'on ait, pour une valeur convenable de λ,

$$(36) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda x_i = 0.$$

---

[1] Cette notation abrégée indique qu'il faut égaler à zéro tous les déterminants formés avec les quatre lignes qu'on obtient en donnant à i quatre valeurs quelconques, prises dans la suite 1, 2, 3, 4, 5.

Pour que deux surfaces, représentées par les équations homogènes

$$f(x_i) = 0 , \quad \varphi(x_i) = 0 ,$$

soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait, pour leurs points communs,

$$(37) \qquad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 .$$

Cette équation a déjà été donnée dans le texte (art. 49).

Enfin, étant donnée une sphère par l'équation

$$\sum m_i X_i = 0 ,$$

toute sphère concentrique aura pour équation

$$(38) \qquad \sum \left(m_i + \frac{K}{R_i} \right) X_i = 0 .$$

Par exemple, si l'on demande l'équation générale des sphères ayant pour centre un point (x_i), cette équation sera

$$(39) \qquad \sum \left(x_i + \frac{K}{R_i} \right) X_i = 0 .$$

Ces dernières propositions se démontrent sans difficulté au moyen des formules générales déjà données.

L'équation de la sphère réduite au plan de l'infini est

$$(40) \qquad \sum \frac{X_i}{R_i} = 0 .$$

VI.

Dans les calculs précédents, nous avons pris pour base de notre système cinq sphères deux à deux orthogonales, mais on peut aussi prendre cinq sphères quelconques, non orthogonales à une même sphère.

Soient en effet (S_i) les cinq sphères orthogonales, et x_i les coordonnées définies plus haut d'un point quelconque.

Effectuons la substitution linéaire

$$x_i = \sum_k m_{ik} y_k , \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5) ; \tag{41}$$

on tirera de ces équations

$$y_i = \sum_k p_{ik} x_k . \tag{42}$$

Les équations

$$y_i = 0$$

représentent donc cinq sphères quelconques, que nous appellerons (S'_i), et qui ne sont pas orthogonales à une même sphère, puisqu'il n'y a entre les y_i aucune relation linéaire identique.

La signification géométrique des nouvelles variables y_i est donc la suivante. Elles sont proportionnelles aux puissances du point par rapport aux sphères (S_i) multipliées par des facteurs constants.

De l'identité

$$\sum x_i^2 = 0$$

on déduira par la substitution une relation

$$\varphi(y_i) = 0 \tag{43}$$

quadratique et homogène, et contenant en général les rectangles des variables y_i. Donc

Il existe, entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères non orthogonales à une même sphère, une relation quadratique et homogène, qui contient en général les rectangles des variables.

Nous n'étudierons pas d'une manière détaillée le nouveau système de coordonnées auquel nous sommes conduit ici. Les formules qui se rapportent à ce système se déduiront sans peine des précédentes, si l'on applique les notions relatives aux invariants et covariants des formes quadratiques homogènes. Nous nous bornerons à indiquer la condition pour que deux sphères soient orthogonales.

Soient

$$\sum m_i y_i = 0 , \quad \sum m'_i y_i = 0$$

les équations des deux sphères et désignons par $\varphi_1(y_i)$ la forme adjointe de $\varphi(y_i)$. La condition d'orthogonalité pourra s'écrire

$$m'_1 \frac{\partial \varphi_1(m_i)}{\partial m_1} + m'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial m_2} + \cdots = 0 .$$

On déduit notamment de cette dernière équation la proposition suivante :

Pour que les cinq sphères qui composent la base du système soient deux à deux orthogonales, il faut et il suffit que la relation identique (43) ne contienne pas les rectangles des variables [1].

---

[1] On pourra consulter sur cette relation un Mémoire de l'auteur, inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. I, nº 6.

Note XI.

Application du système de coordonnées considéré dans la Note précédente à la théorie des cyclides.

I.

Nous avons vu (art. 41) que l'équation d'une cyclide peut se mettre sous la forme

$$A(x^2+y^2+z^2)^2+u_1 t(x^2+y^2+z^2)+u_2 t^2=0,$$

où x, y, z, t désignent les coordonnées homogènes ordinaires d'un point, et u_1, u_2 des polynômes du premier et du second degré. Si nous introduisons les cinq quantités (S_i), définies par les équations suivantes,

$$S_1=xt,\quad S_2=yt,\quad S_3=zt,\quad S_4=t^2,\quad S_5=x^2+y^2+z^2,$$

l'équation de la cyclide se transformera en une équation homogène et du second degré par rapport à ces cinq quantités (S_i). D'ailleurs, celles-ci sont liées, d'après la Note précédente, par une équation identique, qui est ici

(1) $$S_5S_4-S_1^2-S_2^2-S_3^2=f(S_i)=0.$$

Cela posé, désignons, pour abréger, par

(2) $$\varphi(S_i)=0$$

l'équation homogène de la cyclide. D'après des principes bien connus, les deux fonctions $f(S_i)$, $\varphi(S_i)$ pourront être ramenées par une substitution linéaire à ne contenir que les carrés des variables.

L'identité (1) prendra la forme

(3) $$\sum x_i^2=0,$$

et les équations

$$x_i = 0$$

représenteront, par conséquent, des sphères orthogonales. L'équation de la cyclide deviendra

$$\sum A_i x_i^2 = 0 . \tag{4}$$

Nous retrouvons le résultat établi (art. 47).

Il est vrai que, étant données deux formes quadratiques, on ne peut pas toujours les ramener à des sommes de carrés ; mais ces cas d'exception peuvent se déduire du cas général par la méthode des limites.

Examinons, par exemple, le premier de ces cas, qui comprend tous les autres, et qui correspond à l'hypothèse où les sphères

$$x_4 = 0 , \quad x_5 = 0$$

se rapprochent indéfiniment, et viennent se confondre. Alors les équations (3) et (4) prennent les formes

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_4 x'_4 = 0 ,$$
$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_4 x_4^2 + 2b x_4 x'_4 = 0 .$$

Au moyen de la première de ces formules, qui est une identité, on peut éliminer $x_4 x'_4$ de la seconde. L'équation de la cyclide sera donc de la forme

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + A_4 x_4^2 = 0 . \tag{5}$$

Mais la sphère (x_4), étant orthogonale à la sphère infiniment voisine (x_5), devra se réduire à un point, et comme elle est aussi orthogonale à (S_1), (S_2), (S_3), le point auquel elle se réduit sera à l'intersection de ces trois dernières sphères. L'équation (5) représente donc une cyclide, qu'on pourra transformer par une inversion en une quadrique. Il suffira de mettre le pôle de l'inversion au point

$$x_4 = 0 .$$

II.

Soit donc

$$(6) \qquad \sum A_i x_i^2 = 0$$

l'équation d'une cyclide générale.

D'après la formule (33) de la Note précédente, les coordonnées m_i d'une sphère tangente au point x_i auront pour expression

$$(7) \qquad m_i = (A_i + \lambda) x_i ,$$

où λ a une valeur fixe, mais quelconque. Ces coordonnées devront, par conséquent, satisfaire aux deux relations

$$(8) \qquad \sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 , \quad \sum \frac{m_i^2}{(A_i + \lambda)^2} = 0 .$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on aurait la relation qui doit avoir lieu entre les quantités m_i, pour que la sphère qu'elles déterminent soit tangente à la cyclide. On obtiendra évidemment cette relation, en exprimant que la première des équations (8) a une racine double. Cette équation étant biquadratique, son discriminant sera du douzième ordre par rapport aux quantités m_i. Soit

$$(9) \qquad \Psi(m_i) = 0$$

l'équation qu'on obtient en l'égalant à zéro. Elle est homogène et du douzième ordre par rapport aux quantités m_i; on en déduit les conséquences suivantes.

Si l'on cherche combien on peut faire passer, par l'intersection de deux sphères données, de sphères tangentes à la cyclide, il faudra remplacer m_i par $m_i + \lambda m'_i$, et l'on aura pour λ une équation du douzième ordre.

$$(10) \qquad \Psi(m_i + \lambda m'_i) = 0 .$$

Donc *par un cercle on peut mener douze sphères tangentes à la cyclide.*

Si ce cercle devient une ligne droite, les sphères qui le contiennent sont des plans. Donc *la cyclide est de la douzième classe.*

Enfin, si les deux sphères données m_i, m'_i sont concentriques, les sphères $(m_i + \lambda m'_i)$ ont le même centre que les premières. Donc, dans une série de sphères concentriques, il y en a douze qui sont tangentes à la cyclide. En d'autres termes, d'*un point on peut mener douze normales à la cyclide.*

Toutes ces propositions, si différentes en apparence, sont ici des conséquences d'un principe unique.

Ajoutons que l'équation (9), en y regardant les m_i comme les coordonnées d'un plan, est l'*équation tangentielle* de la surface. Cette équation est de la forme

$$I^2 - J^2 = 0 .$$

III.

Proposons-nous de rechercher, quand la sphère (m_i) est quelconque, quelle est la signification géométrique des racines de l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0 .$$

Nous obtiendrons ainsi le résultat suivant. *La sphère* (m_i) *coupe la cyclide suivant une courbe située sur quatre cônes du second degré. La détermination de ces quatre cônes s'effectue par la résolution de l'équation précédente.*

Soit, en effet,

$$(11) \qquad S = \sum m_i S_i = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots = 0$$

l'équation de la sphère sécante, écrite en coordonnées ordinaires. Pour tous les points de la cyclide situés sur cette sphère, on pourra remplacer $x_i = \frac{S_i}{R_i}$ par la fonction du *premier degré* $\frac{S_i - S}{R} = \alpha_i$, et, si l'on effectue cette substitution à la

fois dans l'équation de la cyclide et dans la relation identique entre les quantités x_i, on aura les deux équations

$$\sum A_i \alpha_i^2 = 0 \,, \qquad \sum \alpha_i^2 = 0 \,, \tag{12}$$

qui représentent la première une quadrique, la seconde la sphère sécante (S). On a aussi l'identité

$$\sum m_i \alpha_i = 0 \,, \tag{13}$$

en remplaçant x_i par α_i dans l'équation de la sphère (S).

Cherchons les cônes passant par l'intersection des deux quadriques (12). Pour cela, il faudra exprimer que l'équation

$$\sum (A_i + \lambda) \alpha_i^2 = 0$$

représente un cône, en tenant compte de la relation identique (13). On obtient ainsi, sans difficulté particulière, l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 \,. \tag{14}$$

et les coordonnées du sommet du cône ont pour valeur

$$\alpha_i = \frac{m_i}{A_i + \lambda}$$

La proposition que nous avions en vue est donc démontrée, et l'on voit bien pourquoi une racine double de l'équation (14) correspond à une sphère tangente. Si deux cônes viennent se confondre, la courbe d'intersection de la sphère et de la cyclide aura un point double à leur sommet commun, qui sera le point de contact de la sphère avec la cyclide.

La méthode que nous venons de suivre fournit sans difficulté les sections circulaires des cyclides. Cherchons, en effet, les sphères doublement tangentes; il faudra que l'un des quatre cônes déterminés par l'équation (14) se réduise à deux plans,

et pour cela il est indispensable que l'une des coordonnées du sommet, α_1, par exemple, devienne indéterminée. Soit

$$m_1 = 0\,, \quad \lambda = -A_1\,;$$

comme $\lambda = -A_1$ doit être racine double, on aura, en exprimant ce fait,

$$(15) \qquad m_1 = 0\,, \quad \sum_2^5 \frac{m_i^2}{A_i - A_1} = 0\,.$$

Si, au lieu de α_1, on prenait $\alpha_1, \alpha_3, \ldots$, on aurait bien les cinq séries de sphères doublement tangentes. Interprétons les équations (15).

Le première de ces équations indique que les sphères de la série sont toutes orthogonales à la sphère (S_1).

D'ailleurs, si l'on appelle S_i la puissance du centre de l'une des sphères par rapport à la sphère (S_i), on a d'après la formule (9) de la Note précédente,

$$R_i m_i = S_i - R^2\,, \quad R_1 m_1 = 0 = S_1 - R^2\,,$$

et par suite

$$m_i = \frac{S_i - S_1}{R_i}\,.$$

En substituant ces valeurs dans la deuxième des équations (15), on obtient

$$(16) \qquad \sum \frac{\left(\dfrac{S_i - S_1}{R_i}\right)^2}{A_i - A_1} = 0\,.$$

Cette équation du lieu des centres est bien du second degré, et elle représente une surface conjuguée par rapport au tétraèdre formé des centres des sphères $(S_2), \ldots, (S_5)$.

On retrouve donc la génération des cyclides due à M. Moutard. Nous n'insisterons pas sur les démonstrations très simples qu'on pourrait donner ici des relations entre les quadriques, à l'aide du système de coordonnées que nous avons employé.

IV.

Nous avons vu que la condition de contact d'une sphère et de la cyclide s'obtient en égalant à zéro le discriminant de l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0 .$$

du 4e ordre en λ. Ce discriminant est de la forme

$$I^3 - J^2 ,$$

où I et J sont des fonctions, du 4e et du 6e degré respectivement, des quantités m_i. On peut se demander quelle est la signification géométrique des équations

$$I = 0 \quad \text{ou} \quad J = 0 .$$

Pour répondre à cette question, nous rappellerons le théorème suivant, dû à M. Cremona [1].

Si par deux points d'une cyclique (et en général d'une biquadratique gauche) on mène des plans tangents à la cyclique, ou, si elle est plane, des cercles tangents, le rapport anharmonique des quatre plans ou des quatre cercles ainsi obtenus est constant.

Cette valeur constante est précisément le rapport anharmonique des racines de l'équation précédente du 4e degré.

Quand

$$I = 0 ,$$

cette valeur est égale à une racine cubique imaginaire de l'unité; les différents rapports anharmoniques qu'on peut former avec les quatre racines sont égaux. Nous dirons avec M. Cremona que la courbe est *équiharmonique*.

---

[1] Cremona : Mémoire de géométrie pure, sur les surfaces du 3e ordre. *Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 119.

Ainsi, les sphères dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$(17) \qquad I = 0$$

coupent la surface suivant des cyclides équiharmoniques.

Les quatre cercles ou plans sont, au contraire, en rapport harmonique, si les coordonnées de la sphère satisfont à l'équation

$$(18) \qquad J = 0 .$$

Les équations (17) et (18) étant des ordres 4 et 6, les plans qui satisfont à ces équations enveloppent des surfaces de la 4e et de la 6e classe respectivement. Nous avons donc les théorèmes suivants :

L'enveloppe des plans coupant une cyclide suivant des courbes équiharmoniques est une surface de la 4e classe.

L'enveloppe des plans coupant suivant des courbes harmoniques est de la 6e classe.

Ces propositions, qui s'appliquent à toutes les surfaces du 4e ordre à conique double, sont l'extension des théorèmes de M. Cremona relatifs aux surfaces du 3e ordre [1].

Plus généralement l'équation

$$(19) \qquad I^3 - KJ^2 = 0$$

convient à toutes les sphères coupant la cyclide suivant des courbes de même rapport anharmonique. Celles de ces sphères qui se réduiront à des plans envelopperont une surface de la 12e classe.

V.

Étant donnée la cyclide

$$f(x_i) = \sum A_i x_i^2 = 0 ,$$

---

[1] *Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 68.

nous avons vu que l'équation générale des sphères tangentes à la cyclide au point (x_i) est la suivante,

$$\sum (A_i + \lambda) X_i x_i = 0.$$

Si l'on donne à λ les six valeurs

$$-\infty, \quad -A_1, \quad -A_2, \quad \ldots, \quad -A_5,$$

on obtient successivement une sphère réduite au point de contact (x_i) et les cinq sphères doublement tangentes à la surface ayant un de leurs points de contact en (x_i). Les rapports anharmoniques de ces cinq sphères ou, ce qui est la même chose, de leurs centres disposés sur la normale au point (x_i) seront les mêmes que ceux des six nombres précédents, c'est-à-dire seront constants. Donc

Une normale quelconque à la cyclide rencontre les cinq déférentes en cinq points, qui sont les centres de sphères doublement tangentes à la cyclide et ayant un de leurs points de contact au pied de la normale. Ces cinq points et le pied de la normale déterminent sur cette droite une division homographique à une division fixe; en d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces cinq points demeure constant (1).

La proposition précédente est la généralisation d'un théorème important, relatif aux normales des quadriques qui sont divisées, comme on sait, par les plans principaux de la surface et par leur pied en segments conservant des rapports invariables. Nous allons compléter cette analogie en cherchant, dans le cas des cyclides, le lieu des points qui forment sur chaque normale, avec trois quelconques des six précédents, un rapport anharmonique constant. Cela revient à chercher le lieu des centres des sphères tangentes, correspondantes à une même valeur de λ. Nous dirons que toutes ces sphères

(1) Voir un Mémoire de l'auteur, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. I, 2e série.

sont des sphères tangentes *de même rapport anharmonique*. Elles se représenteront dans les Notes suivantes.

Leurs coordonnées

$$m_i = x_i(A_i + \lambda)$$

satisfont évidemment aux deux équations

$$(20) \qquad \sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0\,, \quad \sum \frac{m_i^2}{(A_i + \lambda)^2} = 0\,.$$

Si l'on désigne les coordonnées de leur centre par x_i, on aura, en vertu de la formule (39) de la Note précédente,

$$m_i = x_i + \frac{K}{R_i}\,,$$

et il faudra, pour obtenir le lieu des centres, éliminer K entre les deux équations

$$(21) \qquad \sum \frac{\left(x_i + \frac{K}{R_i}\right)^2}{A_i + \lambda} = 0\,, \quad \sum \frac{\left(x_i + \frac{K}{R_i}\right)^2}{(A_i + \lambda)^2} = 0\,.$$

Posons

$$(22) \qquad \begin{cases} \varpi(\lambda) = (\lambda + A_1)(\lambda + A_2)\ \ldots\ (\lambda + A_n)\,, \\ \varphi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \frac{x_i^2}{A_i + \lambda}\,, \\ f(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \frac{\frac{x_i}{R_i}}{A_i + \lambda}\,, \\ \psi(\lambda) = \varpi(\lambda) \sum \frac{\frac{1}{R_i^2}}{A_i + \lambda}\,. \end{cases}$$

les équations (22) pourront être remplacées par le système suivant

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi + 2fK + \psi K^2 = 0\,, \\ \varphi' + 2f'K + \psi' K^2 = 0\,, \end{cases}$$

et, en éliminant K, on aura

$$(24) \qquad (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = (\varphi f' - f\varphi')(f\psi' - \psi f')\,.$$

ou encore

$$(25) \qquad (2ff' - \varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = 4(f^2 - \varphi\psi)(f'^2 - \varphi'\psi').$$

Cette équation est du 4e ordre par rapport aux quantités x_i; mais, comme elle ne dépend en réalité que des différences

$$\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i} = \frac{S_i - S_j}{R_i R_j},$$

la surface qu'elle représente sera en général du 4e ordre. Elle aura d'ailleurs, d'après l'équation (24), une conique double, représentée par les équations

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{f'}{f} = \frac{\psi'}{\psi};$$

et enfin, d'après l'identité

$$f^2 - \varphi\psi = -\varpi^2(\lambda) \sum \frac{\left(\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i}\right)^2}{(A_i + \lambda)(A_j + \lambda)},$$

elle se réduira, pour $\lambda = -A_i$, à une quadrique double. En effet $f^2 - \varphi\psi$ deviendra nul, et l'équation (25) prendra la forme

$$\left\{ \sum_j \frac{\left(\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i}\right)^2}{A_i - A_j} \right\}^2 = 0.$$

Cette quadrique est une des déférentes de la cyclide.

Nous retrouverons la surface précédente dans la discussion du problème des normales.

VI.

Nous venons de considérer des sphères tangentes, et de définir ce que nous appelons les sphères de même rapport anharmonique. Nous sommes ainsi amenés à étudier tous les plans tangents de même rapport anharmonique, c'est-à-dire correspondants à une même valeur de λ.

Soient m_i les coordonnées de ces plans tangents; elles

satisferont aux deux équations

$$(26) \qquad \sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0 , \quad \sum \frac{m_i^2}{(\lambda + A_i)^2} = 0 .$$

où λ reste constant; et comme, dans le système actuel de coordonnées appliqué au plan, les m_i sont simplement des coordonnées tangentielles ordinaires (Note X), nous voyons que

Les plans tangents de même rapport anharmonique enveloppent une développable de 4e classe; circonscrite aux deux quadriques (26).

Nous allons compléter ce théorème en prouvant que les points de contact de ces plans tangents, correspondants à une même valeur de λ, sont sur une courbe sphérique de la cyclide; que, si l'on fait varier λ, les différentes courbes ainsi obtenues sont sur des sphères concentriques; et, enfin, que ces sections sphériques sont les seules suivant lesquelles une quadrique puisse être inscrite à la cyclide.

Soit, en effet,

$$\sum (A_i + \lambda) X_i x_i = 0$$

l'équation d'une sphère tangente, de rapport anharmonique λ. Pour qu'elle se réduise à un plan, il faut que l'on ait

$$(27) \qquad \sum (A_i + \lambda) \frac{x_i}{R_i} = 0 ,$$

c'est-à-dire que le point de contact soit sur la sphère représentée par l'équation précédente. Ainsi, le lieu des points de contact des plans correspondants à une même valeur de λ est bien une courbe sphérique.

Si, dans l'équation (27), on fait varier λ, on obtient une série de sphères concentriques. Il reste à démontrer que les sections de la cyclide par ces sphères sont les seules courbes suivant lesquelles une quadrique puisse être inscrite à la cyclide.

Soit, en effet,

$$S = \sum m_i x_i$$

une sphère sécante quelconque, et posons

$$B = \sum \frac{m_i}{R_i^2}$$

Pour tous les points d'intersection de (S) et de la cyclide, on peut remplacer la fonction du second degré x_i par la suivante,

$$x_i - \frac{S}{BR_i},$$

qui est du premier degré par rapport aux coordonnées ordinaires, et l'équation

$$\sum (A_i + \lambda)\left(x_i - \frac{S}{BR_i}\right)^2 = 0 \tag{28}$$

représente, quand on y fait varier λ, toutes les quadriques passant par l'intersection de la cyclide et de (S). Développons cette équation; nous aurons

$$\sum (A_i + \lambda) x_i^2 - \frac{2S}{B} \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i} + \frac{S^2}{B^2} \sum \frac{A_i + \lambda}{R_i^2} = 0,$$

ou

$$\sum A_i x_i^2 + \frac{S}{B}\left[\frac{S}{B} \sum \frac{A_i}{R_i^2} - 2 \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i}\right] = 0. \tag{29}$$

Comme la cyclide a pour équation

$$\sum A_i x_i^2 = 0,$$

on voit que la quadrique (28) coupe la cyclide suivant deux courbes distinctes, situées sur les sphères

$$S = 0, \quad \frac{S}{B} \sum \frac{A_i}{R_i^2} = 2 \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i} \tag{30}$$

Pour que la quadrique soit inscrite à la cyclide, il faut que ces deux sphères se confondent, c'est-à-dire que l'on ait

$$S = \sum \frac{(A_i + \lambda) x_i}{R_i}.$$

On obtient alors

$$B = \sum \frac{A_i}{R_i^2},$$

et l'équation (29) se réduit à la suivante,

$$(31) \qquad \sum A_i x_i^2 - \frac{S^2}{B} = 0,$$

qui montre que la quadrique est inscrite à la cyclide proposée.

L'hypothèse $B = 0$, qui met les raisonnements en defaut, correspond aux cyclides du 3e ordre, qui n'admettent pas de quadriques inscrites.

Ainsi *les plans tangents de même rapport anharmonique formeront une suite de développables de 4e classe, circonscrites à la cyclide suivant des courbes sphériques du 4e ordre. Les tangentes doubles de ces développables seront les seules droites par lesquelles on pourra mener à la cyclide deux plans tangents distincts, de même rapport anharmonique.*

Note XII.

Sur le problème des normales aux cyclides.

I.

Supposons que l'on se propose de mener d'un point des normales à une surface algébrique. Le problème, de quelque manière qu'on le traite, se ramène en définitive à la résolution d'une équation algébrique, contenant une seule inconnue u. Le degré de cette équation donne le nombre des normales qu'on peut mener d'un point à une surface algébrique. Mais la discussion du problème est plus ou moins simple, suivant l'arbitraire qu'on a choisie.

Supposons qu'on se propose de chercher les points de l'espace pour lesquels deux normales menées à la surface se confondent. Si l'on exprime que l'équation en u a une racine double, on obtiendra un lieu géométrique, plus général que celui que l'on demande, et qui est la surface des centres de courbure.

Choisissons pour inconnue, par exemple, le carré de la distance du point d'où l'on mène des normales, au pied de chaque normale. Il est clair que, si l'on prend un point A sur le lieu des centres des sphères doublement tangentes à la surface, il y aura une sphère ayant son centre en A et tangente en deux points a, a' à la surface. Les droites Aa, Aa' seront deux normales menées du point A, et correspondantes à une même valeur de u. L'équation en u aura donc une racine double, sans que les deux normales menées du point A et correspondantes à cette racine double soient confondues.

Il en sera de même si l'on prend toute autre inconnue, l'abscisse, par exemple, du pied de la normale; car, si le

point A se trouve sur la surface, lieu des points d'où l'on peut mener deux normales dont les pieds aient même abscisse, il est clair qu'on aura pour l'abscisse une racine double à laquelle correspondront deux normales différentes.

On voit donc que, de quelque manière qu'on aborde le problème, il sera bien difficile de ne pas avoir à examiner et à rejeter des solutions étrangères, dépendant uniquement du choix de l'inconnue et variant avec elle. On peut ajouter que la même normale peut correspondre à deux valeurs distinctes de l'inconnue. C'est ce qui explique les grandes difficultés qu'offre l'étude du problème des normales. Ces difficultés ont été surmontées d'une manière complète dans le beau Mémoire de M. Clebsch relatif aux surfaces quadriques.

Le problème des normales aux cyclides est beaucoup plus compliqué que le problème analogue relatif aux surfaces du second ordre. Il est d'ailleurs d'une moindre importance; aussi me contenterai-je d'en indiquer la solution, sans examiner tous les cas particuliers.

On a déjà vu (art. 60) que la cyclide a trente normales doubles, qui sont les normales abaissées des centres des cinq sphères directrices sur les déférentes correspondantes.

On a vu aussi, dans la Note précédente, que d'un point on peut mener douze normales à la cyclide. Voici comment on peut former l'équation dont dépendent ces douze normales.

Soit

$$\psi(m_i) = 0 \tag{1}$$

la condition de contact déjà trouvée entre une sphère et la cyclide. Si les coordonnées du centre sont x_i, on aura

$$m_i = \lambda x_i + \frac{\mu}{R_i}, \tag{2}$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1), l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\psi\left(\lambda x_i + \frac{\mu}{R_i}\right) = 0$$

fera connaître les différentes sphères ayant pour centre le

point (x_i), et tangentes à la cyclide, c'est-à-dire les normales menées du point (x_i). Mais il est préférable de suivre la méthode suivante.

Nous avons vu, dans la Note précédente, que la condition de contact s'obtient en éliminant λ entre deux équations

(3) $$\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0,$$

(4) $$\sum \frac{m_i^2}{(\lambda + A_i)^2} = 0.$$

Cela posé, soient deux sphères données (m_i), (m'_i), et cherchons combien on peut faire passer par leur intersection de sphères tangentes à la cyclide. Il suffira ensuite de supposer concentriques les deux sphères données pour obtenir la solution de notre problème particulier.

Toute sphère passant par l'intersection des deux proposées a pour coordonnées $m_i + km'_i$, et l'on aura, pour déterminer k et λ, les deux équations

(5) $$\sum \frac{(m_i + km'_i)^2}{\lambda + A_i} = 0,$$

(6) $$\sum \frac{(m_i + km'_i)^2}{(\lambda + A_i)^2} = 0.$$

Posons

(7) $$\left\{\begin{aligned} \varpi(\lambda) &= (\lambda + A_1)(\lambda + A_2)\ldots(\lambda + A_5), \\ \varphi(\lambda) &= \varpi(\lambda)\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i}, \\ f(\lambda) &= \varpi(\lambda)\sum \frac{m_i m'_i}{\lambda + A_i}, \\ \psi(\lambda) &= \varpi(\lambda)\sum \frac{m'^2_i}{\lambda + A_i}; \end{aligned}\right.$$

les équations (5) et (6) seront équivalentes aux suivantes,

(8) $$\varphi(\lambda) + 2f(\lambda)k + \psi(\lambda)k^2 = 0,$$

(9) $$\varphi'(\lambda) + 2f'(\lambda)k + \psi'(\lambda)k^2 = 0.$$

La première de ces équations est du 4e degré en λ, la seconde est la dérivée de la première par rapport à λ.

Notre première méthode pour la recherche des normales revient à l'élimination de λ entre ces deux équations, élimination qui se fait en exprimant que l'équation (8) en λ a une racine double; mais nous aurons avantage à éliminer k au lieu de λ. On est ainsi conduit à l'équation finale

$$(10)\qquad (\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = 4(\varphi f' - f\varphi')(f\psi' - \psi f'),$$

qui est du douzième ordre en λ, et qui peut être mise, comme on sait, sous la forme équivalente

$$(11)\qquad 2(ff' - \varphi\psi' - \psi\varphi')^2 = 4(f^2 - \varphi\psi)(f'^2 - \varphi'\psi').$$

Il y a quelques remarques à présenter sur cette équation. On a d'abord identiquement

$$(12)\qquad f^2 - \varphi\psi = -\varpi^2(\lambda)\sum_{i,j}\frac{(m_i m'_j - m_j m'_i)^2}{(\lambda + A_i)(\lambda + A_j)},$$

et, si l'on introduit le polynôme du troisième degré suivant

$$F(\lambda) = -\varpi(\lambda)\sum\frac{(m_i m'_j - m_j m'_i)^2}{(\lambda + A_i)(\lambda + A_j)},$$

l'identité (12) peut s'écrire

$$(13)\qquad f^2 - \varphi\psi = \varpi(\lambda)F(\lambda),$$

et l'on déduit de là, en prenant les dérivées des deux membres,

$$2ff' - \varphi\psi' - \psi\varphi' = \varpi' F + \varpi F'.$$

On peut donc donner à l'équation (11) en λ la forme nouvelle

$$(14)\qquad (\varpi F' + \varpi' F)^2 = 4\varpi F(f'^2 - \varphi'\psi').$$

Nous avons ainsi deux formes distinctes et également importantes de notre équation en λ. On voit que cette équation est du 8e ordre par rapport aux quantités m_i, m_i, et il est clair que, si on la développait, elle ne dépendrait que des binômes $m_i m' - m_j m'_i$. Elle est donc à la fois homogène et

du 4e ordre, soit par rapport aux m_i, soit par rapport aux m'_i. Nous allons chercher dans quel cas elle peut avoir une racine double.

Son discriminant, que nous appellerons Δ et qui est du 22e ordre par rapport aux coefficients, devra donc être du 88e ordre, soit par rapport aux m_i, soit par rapport aux m'_i. Nous allons chercher les facteurs de ce discriminant, et déterminer leurs degrés de multiplicité.

Si l'on désigne, pour abréger, par

$$\Phi(\lambda, k)$$

le premier membre de l'équation (8), notre équation en λ est le résultat de l'élimination de k entre les deux suivantes

$$\Phi(\lambda, k) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0.$$

Considérons les deux valeurs k_0 et k_1 de k, tirées de la seconde équation, comme des fonctions de λ *déterminées par cette équation,* et portons-les dans la première. Le résultat de l'élimination de k prend ainsi la forme

$$(15) \qquad \Phi(\lambda, k_0)\,\Phi(\lambda, k_1) = 0.$$

Pour qu'il y ait une racine double de l'équation en λ, il faut que la dérivée du premier membre de l'équation (15) par rapport à λ soit nulle, ce qui donne

$$(16) \qquad \Phi(\lambda, k_0)\, d\Phi(\lambda, k_1) + \Phi(\lambda, k_1)\, d\Phi(\lambda, k_0) = 0.$$

Mais un des deux facteurs du premier membre de l'équation (15) est nul. On a, par exemple,

$$\Phi(\lambda, k_0) = 0.$$

L'équation (16) se réduit alors à

$$\Phi(\lambda, k_1)\, d\Phi(\lambda, k_0) = 0,$$

et, en tenant compte de l'équation

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, k_0)}{\lambda} = 0,$$

qui définit k_0 comme fonction de λ, il reste

$$\Phi(\lambda, k_1) \frac{\partial \Phi(\lambda, k_0)}{\partial k_0} \frac{dk_0}{d\lambda} = 0 . \tag{17}$$

On est ainsi conduit aux trois hypothèses suivantes :

1° $\quad \Phi(\lambda, k_0) = 0, \quad \Phi(\lambda, k_1) = 0,$

c'est-à-dire, les deux équations (8) et (9) en k doivent avoir deux racines communes ou la seconde une racine double $k_0 = k_1$. Cette seconde supposition doit être rejetée, car elle rendrait infinie la dérivée $\frac{dk_0}{d\lambda}$, et l'examen de la première nous conduit au résultat suivant :

Le discriminant cherché Δ contient un premier facteur, qui est le résultat de l'élimination de λ entre les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi\psi' - \psi\varphi' = 0, \\ &f\varphi' - \varphi f' = 0, \\ &\psi f' - f\psi' = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Désignons par M ce premier facteur. Pour l'obtenir, multiplions chacune des équations (18) successivement par $1, \lambda, \lambda^2$; nous obtiendrons ainsi 9 équations du 8e ordre au plus en λ. En éliminant λ par la méthode dialytique, nous aurons une résultante M du 18e ordre soit par rapport aux m_i, soit par rapport aux m'_i, et du 36e ordre par rapport à ces deux séries de variables prises simultanément. Cette résultante M figure dans le discriminant cherché Δ, élevée au carré. (Nous indiquons plus loin la méthode générale au moyen de laquelle nous avons déterminé les puissances auxquelles doivent être élevés les différents facteurs de Δ.)

2° L'équation (17) sera aussi vérifiée dans l'hypothèse suivante :

$$\Phi(\lambda, k_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial k_0} = 0,$$

c'est-à-dire si l'équation (8) en k a une racine double. Cela donne

$$f^2 - \varphi\psi = 0,$$

ou, d'après les notations (13),

$$\varpi F = 0 .$$

L'équation (14) se réduit alors à

$$\left[\frac{d(\varpi F)}{d\lambda} \right]^2 = 0 .$$

Le discriminant Δ doit donc contenir comme facteur le discriminant de ϖF, ce qu'il est d'ailleurs facile de reconnaître d'après la forme de l'équation (14).

Or, le discriminant de ϖF se compose de trois parties : le discriminant de ϖ, qui est une constante; celui de F, que nous appellerons Σ, et la résultante élevée au carré de ϖ et de F.

F étant une fonction du 3e degré en λ, son discriminant Σ sera du 8e ordre par rapport aux m_i.

Quant à la résultante de ϖ et de F, elle se compose des cinq facteurs Q_i, qu'on obtient en portant dans F les racines de ϖ, $\lambda = -A_i$. On a

$$Q_i = \sum_j \frac{(m_i m'_j - m_j m'_i)^2}{A_i - A_j} .$$

3° Enfin, le discriminant de l'équation en λ contient un dernier facteur, correspondant à l'hypothèse suivante, déduite de l'équation (17),

$$\Phi(\lambda, k) = 0 , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 , \quad \frac{dk}{d\lambda} = 0 .$$

La dernière de ces équations peut être remplacée, en tirant $\frac{\partial k}{\partial \lambda}$ de l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 ,$$

par

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0 .$$

Donc, notre dernier facteur correspond au cas où l'équa-

tion (8) en λ a une racine triple, c'est-à-dire où la sphère correspondante a un contact stationnaire avec la surface. En appelant G ce dernier facteur, le discriminant cherché sera

$$(18)\qquad M^2 G Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2 Q_4^2 Q_5^2 \Sigma = \Delta .$$

Il nous reste à déterminer le degré de G et aussi à indiquer comment on détermine l'exposant de chacun des facteurs du discriminant Δ. Commençons par G.

Exprimons que l'équation

$$\sum \frac{m_i^2}{A_i + \lambda} = 0$$

a une racine triple. Comme elle est du 4e degré en λ, on aura les conditions cherchées en égalant à zéro les deux invariants I, J, ce qui donne

$$I = 0, \quad J = 0,$$

équations du 4e et du 6e degré respectivement par rapport aux m_i.

Cela posé, pour avoir G, on remplacera dans ces équations m_i par $m_i + k m'_i$. On obtiendra deux équations en k, l'une du 4e, l'autre du 6e degré, entre lesquelles il faudra éliminer k. Les coefficients étant homogènes par rapport aux m_i, m'_i, et des degrés 4 et 6, G sera de l'ordre

$$6 \times 4 + 4 \times 6 = 48$$

par rapport à ces mêmes quantités. Il sera donc seulement de l'ordre **24** par rapport à chacune des séries de variables, par rapport aux m_i par exemple; car, de même que Δ et tous les facteurs de Δ, G par la nature même de la question dépend uniquement des binômes $m_i m'_j - m_j m'_i$.

En réunissant tous les résultats trouvés, on voit bien que le discriminant (18) est, comme cela doit être, du 88e ordre par rapport aux m_i. Nous allons maintenant indiquer comment nous avons déterminé les degrés de multiplicité de ses différents facteurs.

A cet effet, nous exposerons d'abord une méthode générale qui permet de traiter, dans bien des cas, des questions de la nature de celle que nous avons à examiner ici.

Étant donnée l'équation

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots = 0,$$

on sait que le discriminant de cette équation est, à un facteur numérique près, égal à

$$(19) \qquad a_0^{2n-2} \Pi (x_i - x_j)^2,$$

les x_i désignant les racines de l'équation proposée. D'après cela, toutes les fois qu'un certain nombre de coefficients

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$$

(deux au moins) s'annuleront, l'équation aura une racine nulle multiple, et le discriminant s'annulera.

Supposons, par exemple, que

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots$$

contiennent en facteur des puissances

$$\alpha^{p_1}, \alpha^{p_2}, \alpha^{p_3}, \alpha^{p_4}, \ldots$$

d'une quantité α. Le discriminant devra contenir une certaine puissance de α, que l'on déterminera comme il suit.

Lorsque α devient infiniment petit, plusieurs racines de l'équation sont aussi infiniment petites, et l'on sait, d'après la règle du parallélogramme de Newton, les développer en séries ordonnées suivant les puissances de α. Quant aux autres racines, elles demeurent finies et, en général, inégales. En substituant dans le discriminant (19) les expressions des racines infiniment petites, expressions qu'il suffit en général de limiter à leurs premiers termes, on verra quelle est la puissance de α qui se trouve en facteur.

Faisons d'abord une application de cette règle à la démonstration d'un théorème de Joachimsthal sur le discriminant. Supposons que l'on ait

$$a_n = A\alpha^2, \quad a_{n-1} = B\alpha.$$

Alors, pour $\alpha = 0$, deux racines deviennent nulles, et, pour α très petit, ces racines sont fournies par l'équation

$$A\alpha^2 + B\alpha x + a_{n-2}x^2 = 0,$$

qui donne

$$x = k\alpha, \quad x_1 = k'\alpha, \quad x - x_1 = (k - k')\alpha.$$

Donc le discriminant contient α^2 en facteur. Or, si on l'écrit sous la forme

$$Ma_n + N,$$

N étant formé des termes qui ne contiennent pas a_n, N devra être divisible par α^2, et par conséquent contenir a^2_{n-1} en facteur. Donc le discriminant est de la forme [1]

(20) $$Ma_n + M_1 a^2_{n-1}.$$

Dans le cas où l'équation proposée aurait une racine multiple x_1 différente de zéro, on serait ramené au cas précédent par la substitution $x = x_1 + x'$.

Faisons l'application de la méthode précédente à l'étude de la question proposée. Le degré des facteurs Q_i résulte immédiatement du théorème de Joachimsthal. Cherchons le degré du facteur M, qui est la résultante des trois équations

$$A = \varphi\psi' - \psi\varphi' = 0,$$
$$C = f\varphi' - \varphi f' = 0,$$
$$B = \psi f' - f\psi' = 0.$$

Si, pour une valeur de λ, que nous pouvons supposer égale à zéro, on a

$$A = 0,$$

---

[1] Si l'on suppose que les termes

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$$

soient en α des degrés

$$p, p-1, p-2, \ldots,$$

on arrive à cette proposition plus générale :

Si l'on considère, dans une équation, les p derniers termes comme étant des ordres p, $p-1$, $p-2$, ..., et les autres de l'ordre 0, tous les termes du discriminant sont au moins de l'ordre $p(p-1)$.

en vertu de l'identité

$$fA + \varphi B + \psi C = 0,$$

on aura

$$\varphi_0 B_0 + \psi_0 C_0 = 0,$$

B_0, C_0, φ_0, ψ_0 désignant les termes constants des fonctions correspondantes. B_0, C_0 auront donc un facteur commun, que j'appelle α, et qui sera un facteur simple de la résultante. L'équation (10) en λ étant

$$A^2 = 4BC,$$

on voit que son terme constant contiendra α^2 en facteur, et le coefficient précédent α. Donc le discriminant sera seulement divisible par α^2; et comme α est un facteur simple de M, le discriminant, qui contient α au carré, doit aussi contenir le carré de la résultante M en facteur.

Nous allons faire l'application des résultats analytiques qui précèdent à deux problèmes de géométrie.

II.

Le problème des normales menées d'un point à la cyclide est compris comme cas particulier dans celui que nous venons d'examiner. Il suffit de supposer que les deux sphères m_i, m'_i soient concentriques. Alors toutes les sphères $m_i + km'_i$ auront même centre que les deux premières, et la recherche de celles qui sont tangentes à la cyclide revient à la détermination des normales menées de leur centre commun à la surface. On peut encore procéder comme il suit.

Soient x_i les coordonnées du point M d'où l'on veut mener des normales, et prenons

$$(21) \qquad m_i = x_i, \quad m'_i = \frac{1}{R_i}.$$

Alors les sphères $m_i + km'_i$ auront pour centre le point M. Les fonctions f, φ, ψ auront ici pour expressions

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \varpi(\lambda)\sum\frac{x_i^2}{\lambda+A_i},\\ f(\lambda) &= \varpi(\lambda)\sum\frac{\dfrac{x_i}{R_i}}{\lambda+A},\\ \psi(\lambda) &= \varpi(\lambda)\sum\frac{\dfrac{1}{R_i^2}}{\lambda+A_i},\end{aligned}\right.$$

et $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ seront du 3e degré seulement. L'équation (10),

$$(23)\qquad (\varphi\psi'-\psi\varphi')^2=(f\psi'-\psi f')(f'\varphi-\varphi' f)$$

demeurera du 12e degré. Si l'on y considère λ comme fixe et les x_i comme variables, elle représente la surface du 4e ordre à conique double, étudiée dans la Note précédente, lieu des centres des sphères de même rapport anharmonique, tangentes à la cyclide.

La conique double de cette surface est définie par les équations

$$(23)\qquad \frac{f}{f'}=\frac{\varphi}{\varphi'}=\frac{\psi}{\psi'}\,.$$

Nous allons maintenant indiquer la signification géométrique des différents facteurs du discriminant.

Les Q_i, égalés à zéro, représentent les cinq surfaces déférentes de la cyclide.

En effet, pour chaque point M d'une déférente, on peut mener deux normales correspondantes à une même valeur de λ, et dont les pieds sont les points de contact de la sphère de centre M doublement tangente à la surface. L'équation en λ a donc une racine double.

Σ', égalé à zéro, représente l'enveloppe des quadriques homofocales aux cinq déférentes. Pour tout point M de (Σ), deux normales à la cyclide viennent se confondre avec la génératrice rectiligne de (Σ) passant en M, et qui, considérée comme normale, a son pied sur le centre de l'infini.

G, égalé à zéro, représente la surface des centres de cour-

bure. D'après les remarques que nous avons faites, G est du 24e ordre par rapport aux binômes

$$\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i} = \frac{S_i - S_j}{R_i R_j},$$

qui sont des fonctions du premier degré des coordonnées ordinaires du point. Donc

La surface des centres de courbure est du 24e ordre.

Enfin, le facteur M, qui est la résultante des équations

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} f\varphi' - \varphi f' &= 0, \\ f\psi' - \psi f' &= 0, \\ \varphi\psi' - \psi\varphi' &= 0, \end{aligned} \right.$$

se décompose ici de la manière suivante.

Les fonctions φ et ψ sont du 3e degré. Si donc on a

$$\sum \frac{x_i}{R_i} = 0,$$

les trois premiers membres des équations (24) se réduisent au 4e degré, et l'équation (23) en λ s'abaissera du 12e au 8e degré. Elle aura quatre racines infinies. Donc le facteur

$$\sum \frac{x_i}{R_i}$$

doit figurer dans le discriminant, et, en appliquant la méthode générale déjà indiquée, on trouve qu'il y est à la puissance sixième. On a donc ici

$$M = \left(\sum \frac{x_i}{R_i}\right)^3 N,$$

et $N = 0$ représente le lieu des coniques doubles de toutes les surfaces représentées par l'équation (23), quand on y fait varier λ.

Nous connaissons maintenant les différents lieux que doit occuper le point M pour que l'équation en λ, qui détermine les normales menées de ce point, acquière une racine double.

Nos équations générales s'appliquent aussi à la discussion

des plans tangents menés par une droite à la surface, et dans ce cas nos différents facteurs du discriminant (18) reçoivent de nouvelles interprétations géométriques.

Supposons ici que les m_i, m'_i soient les coordonnées de deux plans; alors les $m_i + km'_i$ seront les coordonnées d'un plan passant par l'intersection des deux premiers, et les calculs que nous avons faits donnent la solution du problème suivant : Mener à la cyclide un plan tangent par une droite donnée (m_i, m'_i). Voyons dans quels cas l'équation en λ aura ici une racine double.

$G = 0$ exprime que la droite est tangente à la développable formée par les plans ayant un contact stationnaire avec la cyclide. Cette développable est donc de la 24e classe.

$Q_i = 0$ exprime que la droite est tangente du cône enveloppe des plans tangents doubles passant par le centre de la sphère (S_i).

$\Sigma = 0$ est la condition de contact d'une droite et de la cyclide.

L'interprétation de l'équation

$$M = 0$$

est un peu moins simple.

Quand une droite satisfera à cette équation, on pourra mener par elle deux plans tangents de même rapport anharmonique à la cyclide; elle sera donc une tangente double de l'une des développables définies à la fin de la Note précédente, qui sont les enveloppes des plans tangents de la cyclide, ayant même rapport anharmonique [1].

---

[1] Il ne sera pas inutile de lever ici une objection qu'on pourrait adresser à notre méthode. Quand la droite rencontre une des seize droites δ de la cyclide, le plan mené par les deux droites est un plan tangent double, d'une espèce particulière, et il doit être compté pour deux. Mais comme ce plan tangent double n'a pas le même rapport anharmonique pour ses deux points de contact, il sera donné par deux racines différentes de notre équation en λ. Voilà pourquoi nous ne le trouvons pas en exprimant que l'équation en λ a deux racines égales.

On voit par ces exemples que le problème général d'élimination résolu au commencement de cette Note conduit à un grand nombre de conséquences géométriques. Il donne la surface des centres ou la développée de la cyclide, la condition de contact d'une droite et de la surface, la développable formée par les plans tangents stationnaires, etc. Les méthodes que nous avons suivies nous paraissent d'ailleurs applicables à toute équation

$$\Phi(\lambda, k) = 0,$$

qui serait d'un degré quelconque en k, au lieu d'être du second degré, comme dans l'exemple que nous avons traité, ou du premier degré, comme dans le problème des normales aux quadriques.

III.

Proposons-nous maintenant de rechercher le nombre des normales à la cyclide contenues dans un plan quelconque. Il est clair que cette question est comprise dans la suivante :

En combien de points une sphère est-elle normale à la cyclide?

Soit une sphère (m_i). Les conditions pour qu'elle soit normale au point (x_i) sont les suivantes (Note XI),

$$(25) \qquad \sum m_i A_i x_i = 0, \quad \sum m_i x_i = 0.$$

Ces deux équations représentent un cercle qui coupe la cyclide aux points cherchés. Donc *toute sphère est normale en quatre points*. Si elle se réduit à un plan, celui-ci sera normal en quatre points, et par conséquent contiendra quatre normales de la cyclide. La géométrie conduit au même résultat.

Nous allons, en terminant, déterminer la classe de la surface des centres de courbure. A cet effet, étant donnée la sphère (m_i), cherchons la condition pour qu'elle soit normale en deux points consécutifs. S'il en est ainsi, il est clair qu'elle coupera la cyclide tangentiellement à une ligne de courbure.

Pour que la condition précédente soit remplie, il faudra que

le cercle défini par les équations (25) soit tangent à la cyclide, et par conséquent qu'une sphère

$$\sum m_i(A_i + \beta) X_i = 0 ,$$

passant par ce cercle soit tangente à la cyclide en un point (x_i) du cercle. On devra donc avoir, en identifiant l'équation précédente à celle d'une sphère tangente au point (x_i),

$$(A_i + \beta) m_i = x_i (A_i + \lambda) .$$

Exprimons que le point (x_i) se trouve à la fois sur le cercle et sur la cyclide; nous obtiendrons les équations suivantes,

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum m_i^2 (A_i + \beta) = 0 , \\ &\sum \frac{m_i^2 (A_i + \beta)}{A_i + \lambda} = 0 , \\ &\sum \frac{m_i^2 (A_i + \beta)}{(A_i + \lambda)^2} = 0 . \end{aligned} \right.$$

La première détermine β. Éliminer λ entre les deux autres, c'est exprimer que la seconde a une racine double. Or, cette seconde équation n'est que du 3e degré en λ, en vertu de la première. On sera donc conduit, en égalant son discriminant à zéro, à une relation

$$(27) \qquad \Phi (m_i) = 0 ,$$

du 4e ordre par rapport aux coefficients de cette équation, c'est-à-dire, en remplaçant β par sa valeur, du 16e ordre par rapport aux m_i.

Les plans satisfaisant à l'équation précédente sont évidemment les plans normaux principaux de la cyclide, et ils enveloppent la surface des centres. *Celle-ci est donc de la seizième classe.*

Cherchons, par exemple, les plans tangents à la surface des centres et passant par un des pôles principaux, le centre de (S_1) par exemple. Pour ces plans on aura

$$m_1 = 0 ;$$

a seconde des équations (26) devient

$$(A_1 + \lambda) \sum \frac{m_i^2 (A_i + \beta)}{A_i + \lambda} = 0 .$$

Si l'on prend $\lambda = - A_1$, on est conduit à un cône de la quatrième classe à compter deux fois.

Si l'on choisit le second facteur,

$$\sum \frac{m_i^2 (A_i + \beta)}{A_i - \lambda} = 0 ,$$

on a à exprimer que l'équation précédente, du second degré en λ, a une racine double, et l'on trouve ainsi un cône de la huitième classe. Les propriétés et la génération de ces deux cônes peuvent être trouvées par la géométrie.

Note XIII.

Sur les cyclides homofocales et orthogonales et sur leur surface des centres de courbure.

I.

Nous avons vu dans le texte (art. 47) que l'équation

$$\sum \frac{x_i^2}{\alpha - a_i} = 0\,, \tag{1}$$

où

$$\sum x_i^2 = 0\,,$$

représente, quand on fait varier α, un système de cyclides orthogonales. On peut démontrer d'une manière simple que ces cyclides sont homofocales, et indiquer quelques propriétés de la développable qui leur sert d'enveloppe.

Soit, en effet, une sphère

$$\sum m_i x_i = 0\,. \tag{2}$$

La condition pour qu'elle soit tangente à la cyclide est que l'équation en μ,

$$\sum \frac{m_i^2}{\frac{1}{a_i - \alpha} - \mu} = 0\,, \tag{3}$$

ait une racine double. En posant $\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha}$, l'équation précédente prend la forme

$$\frac{-\sum m_i^2}{\lambda + \alpha} + \sum \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = 0\,, \tag{4}$$

et l'on a à exprimer qne cette équation a une racine double.

Si la sphère est de rayon nul, l'équation précédente devient [1]

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = 0 . \tag{5}$$

Le discriminant de cette équation est évidemment indépendant de α. Donc ***toutes les sphères de rayon nul ou tous les plans tangents au cercle de l'infini, qui sont tangents à une cyclide, sont aussi tangents à toutes les cyclides orthogonales***; c. q. f. d.

En exprimant que l'équation (5) a une racine double, on trouvera une équation du 8e ordre par rapport aux quantités m_i. Donc, si l'on considère les m_i comme les coordonnées d'un point sphère placé sur la développable focale, on voit que cette surface est du 16e ordre, ce qui est d'accord avec un résultat de l'article 51, relatif à son intersection avec une sphère. Au contraire, si l'on considère les m_i comme les coordonnées d'un plan, qui sera alors un plan tangent de la développable, l'équation étant du 8e ordre, la développable sera de la huitième classe.

Nous savons d'ailleurs que cette surface a cinq lignes doubles du 4e ordre et une ligne octuple, le cercle de l'infini.

II.

Les cyclides orthogonales donnent lieu à un système de coordonnées curvilignes analogue à celui des coordonnées elliptiques, et dont nous avons exposé quelques propriétés (art. 51).

On peut présenter ce système avec une plus grande généralité, et obtenir des résultats nouveaux, en raisonnant de la manière suivante.

Étant donnée une sphère (m_i), l'équation (4) aura, en général, quatre racines distinctes $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

---

[1] L'hypothèse $\lambda = \alpha$ que nous négligeons conduirait aux points de la surface considérés comme sphères de rayon nul.

On peut prendre ces quatre racines pour déterminer la sphère, et alors on aura l'identité

$$(6) \qquad \frac{-\Sigma m_i^2}{\lambda-\alpha}+\sum\frac{m_i^2}{\lambda-a_i}=\frac{M(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)(\lambda-\rho_3)}{(\lambda-\alpha)\varpi(\lambda)},$$

en posant

$$\varpi(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\ldots(\lambda-a_6).$$

M est d'ailleurs un coefficient dont il est inutile de connaître la valeur, et qui multiplie λ^4 après qu'on a chassé les dénominateurs dans le premier membre de l'équation (6).

Faisons, dans cette identité, successivement $\lambda=\alpha$ et $\lambda=a_i$; nous aurons

$$(7) \qquad \sum m_i^2=\frac{M(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)(\alpha-\rho_2)(\alpha-\rho_3)}{-\varpi(\alpha)},$$

$$(8) \qquad m_i^2=\frac{M(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)(a_i-\rho_3)}{(a_i-\alpha)\varpi'(a_i)}.$$

On obtient ainsi les coordonnées m_i de la sphère en fonction des racines $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

On voit, à cause des doubles signes qu'on peut donner à m_i, qu'il y a seize sphères correspondantes à un système de valeurs de $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$. Ces seize sphères forment un système anallagmatique par rapport aux cinq sphères (S_i).

Une fois connues les coordonnées m_i, on aura le centre et le rayon de la sphère par les formules (7) et (11) de la Note X.

Si X, Y, Z, T sont les coordonnées cartésiennes homogènes du centre, et R le rayon, ces formules nous donnent

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &X=\sum\frac{\alpha_i m_i}{R_i}, \quad Y=\sum\frac{\beta_i m_i}{R_i}, \quad Z=\sum\frac{\gamma_i m_i}{R_i}, \\ &T=\sum\frac{m_i}{R_i} \qquad R=\frac{\sqrt{\Sigma m_i^2}}{\sum\frac{m_i}{R_i}}\end{aligned}\right.$$

Cela posé, si la sphère considérée devient tangente à la

cyclide, nous savons que deux racines de l'équation (4) deviennent égales. On aura donc, par exemple,

$$\rho_2 = \rho_3 = u,$$

et par suite les formules (8) deviendront

$$(10) \quad \begin{cases} \sqrt{\Sigma m_i^2} = (\alpha - u)\sqrt{\dfrac{M(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)}{-\varpi(\alpha)}}, \\ m_i = (a_i - u)\sqrt{\dfrac{M(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{(a_i-\alpha)\varpi'(a_i)}}. \end{cases}$$

Lorsque, laissant ρ, ρ_1 constants, on fait varier u, on a une suite de sphères, toutes tangentes au même point de la cyclide, celui qu'on obtient en faisant $u = \alpha$; car, pour cette valeur de u, le rayon devient nul, et la sphère tangente se réduit à son point de contact. On trouve ainsi, pour les coordonnées d'un point de la cyclide,

$$(11) \qquad x_i = \sqrt{\frac{M(a_i-\alpha)(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)}}.$$

Ce sont les formules du texte (art. 50). ρ et ρ_1 sont donc les coordonnées curvilignes du point de contact de la sphère tangente à la cyclide, telles qu'elles ont été définies à l'article cité.

Si dans les formules (10) on donne à u une valeur constante h, on obtient, en faisant varier ρ, ρ_1, toutes les sphères tangentes à la cyclide et de même rapport anharmonique. Les centres de ces sphères décrivent alors la surface du 4e ordre considérée dans la Note XI.

Si, au lieu de donner à u une valeur constante, on lui donne la valeur ρ ou ρ_1, trois racines de l'équation (4) deviennent égales, et la sphère est osculatrice à la cyclide. Ainsi, les équations

$$(12) \qquad m_i^2 = \frac{M(a_i-\rho)^3(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)},$$

$$(13) \qquad \sum m_i^2 = \frac{M(\alpha-\rho)^3(\alpha-\rho_1)}{-\varpi(\alpha)}$$

déterminent toutes les sphères osculatrices, quand on donne à ρ et à ρ_1 toutes les valeurs possibles. Les centres de ces sphères décrivent la développée de la cyclide, et l'on aura par conséquent les expressions en ρ et ρ_1 des coordonnées des points de cette surface, en substituant dans les formules (9) les valeurs de m_i tirées de l'équation (12).

Si les quatre valeurs ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont deux à deux égales, si l'on a, par exemple,

$$\rho_2 = \rho; \qquad \rho_3 = \rho_1,$$

les formules deviendront

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} m_i &= \frac{\sqrt{\mathrm{M}}(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}}, \\ \sqrt{\Sigma m_i^2} &= \frac{\sqrt{\mathrm{M}}(\alpha-\rho)(\alpha-\rho_1)}{\sqrt{-\varpi(\alpha)}}. \end{aligned} \right.$$

Mais on sait que, si l'équation en λ relative à deux quadriques a deux racines doubles, ces surfaces se coupent, en général, suivant une droite et une cubique gauche, qui rencontre la droite en deux points distincts. On voit donc que, dans l'hypothèse que nous examinons, la sphère coupera la cyclide suivant une droite et une cubique gauche.

A cause des différentes combinaisons de signes des radicaux dans les formules (14), on voit qu'il y a seize séries de sphères. Ces seize séries correspondent évidemment aux seize droites de la cyclide. On peut d'ailleurs trouver les équations de ces droites.

L'une des sphères aura pour équation

$$(15) \qquad \sum x_i \frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0;$$

elle contiendra donc tous les points satisfaisant aux équations

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{a_i^2 x_i}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0, \quad \sum \frac{a_i x_i}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0, \\ &\sum \frac{x_i}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i-\alpha)}} = 0; \end{aligned} \right.$$

et ces équations représentent, par conséquent, la ligne droite commune à toutes les sphères.

Les quantités m_i étant, dans les formules (14), des fonctions linéaires de $\rho\rho_1$ et de $\rho + \rho_1$, les centres des sphères de chaque série décriront un plan. Ce résultat est évident par la géométrie. Car soit δ une droite de la cyclide, qui rencontre le cercle de l'infini. Toute sphère contenant cette droite aura son centre dans le plan tangent au cercle de l'infini mené par cette droite.

Enfin, si les quatre racines ρ deviennent égales, on a

$$(17) \qquad m_i = \frac{\sqrt{\mathrm{M}}(a_i - \rho)^2}{\sqrt{\varpi'(a_i)(a_i - \alpha)}}.$$

Les sphères correspondantes ont un contact plus intime avec la surface que les sphères osculatrices ordinaires; elles coupent la cyclide suivant une de ses droites δ et suivant une cubique gauche tangente à la droite. Les centres de ces sphères décrivent des coniques (Q), situées dans les seize plans des centres déjà définis, et ces coniques sont évidemment sur la surface des centres de courbure ou développée de la cyclide.

Les seize coniques (Q) correspondent évidemment aux différentes combinaisons de signes dans les formules (17); elles ont donc en commun les points correspondants aux valeurs a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 de ρ, qui annulent une des quantités m_i.

Parmi les sphères précédentes, quarante, correspondantes aux valeurs

$$\rho = a_i,$$

coupent la cyclide suivant deux droites et suivant un cercle passant au point de rencontre de ces droites, point qui est un ombilic de la cyclide. La cyclide a donc quarante ombilics et les seize coniques (Q) sont tangentes les unes aux autres aux ombilics. Chaque conique est tangente à cinq autres, et la tangente commune à deux d'entre elles est la normale à la cyclide en un ombilic.

Pour tous les points de ces coniques, trois normales à la surface viennent se confondre en une seule, la tangente à la conique au point considéré. Pour les points de contact de deux coniques, quatre normales viennent confondre leurs pieds à l'ombilic correspondant.

Les propriétés que nous rencontrons ici sont analogues à celles que M. Clebsch a découvertes pour la surface des centres de courbure des quadriques. On peut compléter l'analogie en remarquant que le plan des coniques (Q) est tangent à la développée en tous les points de ces coniques.

En effet, si dans l'équation (10) on permute ρ et α, on aura une sphère tangente à la cyclide (ρ) et normale à la cyclide (α), qu'elle coupe tangentiellement à une ligne de courbure. Ainsi les équations

$$(18)\qquad m_i = (a_i - u)\sqrt{\frac{M(a_i-\alpha)(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)(a_i-\rho)}}$$

conviennent à toute sphère normale à la cyclide proposée, et la coupant tangentiellement à une direction principale.

On aura donc le plan normal principal, si l'on dispose de u de telle manière que les formules (18) conviennent à un plan, ce qui donne,

$$(19)\qquad \sum \frac{m_i}{R_i} = 0,$$

ou

$$(20)\qquad \sum \frac{a_i - u}{R_i}\sqrt{\frac{M(a_i-\alpha)(a_i-\rho_1)}{\varpi'(a_i)(a_i-\rho)}} = 0.$$

En tirant de cette équation la valeur de u et la portant dans (18), on aurait les expressions des coordonnées d'un plan tangent à la développée en fonction des paramètres ρ, ρ_1.

Les seize coniques (Q) correspondent à l'hypothèse

$$\rho = \rho_1,$$

et alors l'équation (20) donnera pour u une valeur constante. Quant aux équations (18), elles fournissent pour m_i des nom-

bres fixes, et nous montrent ainsi que le plan tangent demeure le même en tous les points des coniques (Q).

Un raisonnement par analogie nous conduirait même à affirmer que ces plans ont, comme dans le cas des quadriques, un contact du deuxieme ordre avec la développée.

Du reste, la développée a d'autres lignes multiples, une ligne double et cinq lignes de rebroussement, qui sont les lieux des centres des sphères osculatrices en tous les points des sections de la cyclide par les cinq sphères directrices. Mais nous laisserons au lecteur le soin d examiner plus complètement ces différentes questions.

Note XIV.

Sur quelques propriétés de géométrie infinitésimales relatives aux cyclides.

On peut utiliser les formules données dans les Notes précédentes, et donner pour différentes surfaces, se rattachant d'une manière directe aux cyclides, l'expression de la distance de deux points infiniment voisins.

Soient

$$\sum A_i x_i^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation de la cyclide, et

$$\sum m_i x_i = 0 \tag{2}$$

celle d'une sphère. L'équation

$$\sum m_i x_i = 0$$

a quatre racines, au moyen desquelles nous déterminerons les m_i, et en posant

$$\sum m_i^2 = 1, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(u) &= (u-\rho)(u-\rho_1)(u-\rho_2)(u-\rho_3), \\ f(u) &= (u-A_1)\ldots(u-A_5), \end{aligned}\right. \tag{4}$$

on aura, comme dans la Note précédente,

$$m_i^2 = \frac{\varphi(A_i)}{f'(A_i)}, \tag{5}$$

et l'on démontrera par les procédés connus l'équation

$$\sum dm_i^2 = \sum_k \frac{\varphi'(\rho_k)\, d\rho_k^2}{f(\rho_k)} = \sum \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)\, d\rho^2}{f(\rho)}. \tag{6}$$

En nous reportant à la formule (24) de la Note X, nous voyons que, si x, y, z désignent les coordonnées cartésiennes du centre de la sphère (2) et R le rayon de cette sphère, on obtient ici

$$(7)\qquad dx^2+dy^2+dz^2-dR^2=R^2\sum dm_i^2=R^2\sum\frac{\varphi'(\rho_k)\,d\rho_k^2}{f(\rho_k)}.$$

On a d'ailleurs, d'après la formule (11) de la même Note,

$$(8)\qquad \frac{1}{R}=\sum\frac{m_i}{R_i},$$

et l'on déduit de ces équations les conséquences suivantes.

D'abord, si l'on fait

$$\rho_2=\rho_3=u,$$

la sphère devient tangente à la cyclide, et la formule (7) se réduit à la suivante,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} dx^2+dy^2+dz^2 &= dR^2+R^2\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-u)^2d\rho^2}{f(\rho)}\\ &\quad +R^2\frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-u)^2d\rho_1^2}{f(\rho_1)}.\end{aligned}\right.$$

C'est l'expression du ds^2 dans un système orthogonal, formé des surfaces parallèles à la cyclide et des développables qui les coupent à angle droit. La variable u sera donnée en fonction de R par l'équation (8), qui est du premier degré en u, puisqu'on a ici

$$(10)\qquad m_i=(u-A_i)\sqrt{\frac{(\rho-A_i)(\rho_1-A_i)}{f'(A_i)}}.$$

Si l'on suppose R constant, on aura ds^2 pour la surface parallèle à la cyclide,

$$(11)\qquad \frac{ds^2}{R^2}=(\rho-\rho_1)\left[\frac{(\rho-u)^2d\rho^2}{f(\rho)}-\frac{(\rho_1-u)^2d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right].$$

Si l'on suppose que R croît indéfiniment, $\frac{ds^2}{R^2}$ tendra vers une valeur finie $d\sigma^2$, et la formule

$$(12)\qquad d\sigma^2=(\rho-\rho_1)\left[\frac{(\rho-v)^2d\rho^2}{f(\rho)}-\frac{(\rho_1-v)^2d\rho^2}{f(\rho_1)}\right],$$

où υ est la limite de u, définie par l'équation

$$0=\sum \frac{m_i}{R_i},$$

donnera la représentation sphérique de la cyclide. On voit que, υ étant une fonction de ρ et de ρ_1, *les lignes qui composent cette représentation ne sont pas isothermes.*

Enfin, si l'on fait

$$u=\rho_1,$$

trois valeurs de ρ devenant égales, la sphere sera osculatrice, et l'on aura

$$(13) \qquad dx^2+dy^2+dz^2=dR^2+R^2\frac{(\rho-\rho_1)^3 d\rho^2}{f(\rho)},$$

c'est-à-dire le carré de la distance de deux points infiniment voisins sur la surface des centres de courbure de la cyclide. Cette expression met en évidence le système des lignes géodésiques qui correspondent sur la développée aux lignes de courbure de la proposée.

Note XV.

De différents systèmes de lignes définies par des propriétés différentielles et qu'on peut déterminer sur toutes les cyclides.

Nous avons, dans le cours de cette étude, appris à déterminer plusieurs systèmes de lignes tracées sur les cyclides. On connaît :

1° Leurs lignes de courbure, qui sont algébriques;

2° Leurs lignes de longueur nulle (art. 51). Elles sont définies par cette propriété que leurs tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini. Il résulte de là que l'on saura déterminer sur toute surface du troisième ordre les lignes dont les tangentes vont rencontrer une conique fixe quelconque de cette surface. En effet, on peut toujours transformer par l'homographie une surface cubique en cyclide, une conique déterminée de cette surface devenant le cercle de l'infini, et alors les lignes dont les tangentes allaient rencontrer cette conique se transforment dans les lignes de longueur nulle de la cyclide.

3° On connaît aussi les lignes de courbure de la cyclide, quand on prend pour *absolu*, suivant la définition de M. Cayley (art. 62 et Note V), non plus le cercle de l'infini, mais *une quadrique quelconque inscrite dans la cyclide*, ou, si la cyclide est du troisième ordre, une conique quelconque de cette surface. Ces lignes sont algébriques.

4° On connaît encore, dans les mêmes hypothèses, les lignes de longueur nulle (Note V), c'est-à-dire celles dont les tangentes demeurent aussi tangentes à une quadrique fixe inscrite dans la cyclide.

Nous nous proposons d'intégrer dans cette Note les équations différentielles de différents autres systèmes de lignes.

Soit un point M d'une surface; la sphère normale en ce point à la surface et orthogonale à deux sphères fixes est évidemment déterminée par ces conditions. Elle coupe le plan tangent suivant une droite qu'on peut considérer comme la tangente à une courbe tracée sur la surface. On aura ainsi un système de courbes définies par cette propriété, qu'il y a une sphère qui leur est tangente en chaque point, qui est normale en ce point à la surface, et en outre orthogonale à deux sphères fixes.

La détermination de ces lignes peut se faire sur toute cyclide, au moins si l'on prend pour les sphères fixes deux des sphères directrices.

Soit

$$(1) \qquad \sum A_i x_i^2 = 0 \,,$$

l'équation d'une cyclide; supposons que les sphères tangentes à la courbe doivent être orthogonales à (S_4) et (S_5). Leur équation sera

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 = 0 \,.$$

Pour que la sphère représentée par cette équation soit normale au point (x_i) de la cyclide, il faut (Note XI) que l'on ait

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \,,$$
$$A_1 m_1 x_1 + A_2 m_2 x_2 + A_3 m_3 x_3 = 0 \,.$$

Comme la sphère est tangente à la courbe cherchée, on doit avoir

$$m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + m_3 dx_3 = 0 \,.$$

Éliminons m_1, m_2, m_3 entre ces équations; nous trouvons l'équation différentielle

$$(2) \qquad (A_2 - A_3)\frac{dx_1}{x_1} + (A_3 - A_1)\frac{dx_2}{x_2} + (A_1 - A_2)\frac{dx_3}{x_3} = 0 \,,$$

ou, en intégrant

$$(3) \qquad \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{A_3} \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{A_1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{A_2} = C \,.$$

Telle est l'équation des lignes cherchées.

Quand la cyclide se réduit à une quadrique, deux des cinq sphères (S_i) sont rejetées à l'infini; les trois autres deviennent les plans principaux. Les courbes précédentes se transforment en deux espèces de courbes sur les quadriques : 1° les lignes de plus grande pente, un des plans principaux étant horizontal; 2° les lignes telles que la normale à ces lignes, située dans le plan tangent à la surface, aille rencontrer un axe de cette surface.

Considérons maintenant les courbes telles qu'il y ait une sphère passant par trois de leurs points consécutifs, ou, ce qui est la même chose, par leur cercle osculateur, normale à la surface et orthogonale à une sphère fixe (S). Ces lignes, comme nous l'allons montrer, ont des propriétés analogues à celles des lignes géodésiques.

En effet, étant donnée la sphère (S), considérons une surface (B'), et soumettons-la au mode de transformation défini par les formules (14) de l'article 44. Alors à (B') correspondra une anallagmatique (Σ) ayant pour sphère directrice (S), et pour déférente la polaire réciproque (B) de (B') par rapport à (S). Cela posé, considérons sur (B') les lignes géodésiques, en prenant pour absolu la sphère (S) (Note V).

Ces lignes géodésiques (g) sont définies par une double propriété. Elles rendent minimum l'arc

$$\int d\sigma \tag{4}$$

mesuré par rapport à (S), et de plus leur plan osculateur est normal au plan tangent de la surface. A ces lignes correspondront sur (Σ) des lignes (g_1), rendant minimum l'intégrale

$$\int \frac{ds}{S}, \tag{5}$$

où S désigne la puissance par rapport à la sphère (S), et qui est la transformée de $\int d\sigma$. De plus, au plan osculateur des lignes (g) correspond la sphère passant par trois points consécutifs des lignes (g_1) et orthogonale à (S). La propriété du

plan osculateur des lignes (g) entraîne donc la suivante pour les lignes (g_1) :

Les lignes définies sur toute surface par la condition qu'une sphère passant par leur cercle osculateur et normale à la surface soit en même temps orthogonale à une sphère fixe (S) *possèdent la propriété de rendre minimum l'intégrale*

$$\int \frac{ds}{S},$$

où ds désigne la différentielle de l'arc et S *la puissance par rapport à la sphere* (S).

On peut faire ici une remarque qui nous sera utile. Les lignes qui rendent minimum, entre deux points quelconques de l'espace, l'intégrale précédente sont les cercles orthogonaux à (S). En effet, les lignes qui dans la figure (B) rendent minimum $\int d\sigma$ sont des lignes droites (Note V), et par conséquent elles ont pour transformées dans la figure (Σ) des cercles orthogonaux à (S), qui rendent minimum l'intégrale $\int \frac{ds}{S}$, transformée de $\int d\sigma$.

Comme les cyclides sont les transformées des quadriques, et qu'on sait déterminer les lignes géodésiques de toute quadrique (B), en prenant pour absolu une quadrique quelconque (S), on voit qu'on saura déterminer sur toute cyclide les lignes dont il est ici question. Si la cyclide devient l'inverse d'une quadrique, ces lignes sont les inverses des lignes géodésiques de la quadrique. Ainsi, quand la cyclide dégénère en quadrique, ces lignes deviennent des géodésiques.

On peut aussi déterminer sur les cyclides les lignes pour lesquelles la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface [1].

---

[1] Voir une Note de l'auteur, *Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 732.

Soit

$$\sum \frac{x_i^2}{a_i - \alpha} = 0 \tag{6}$$

l'équation d'une cyclide. Celle d'une sphère tangente au point (x_i) sera

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} X_i x_i = 0 \,, \tag{7}$$

et l'on sait que, si λ reste constant, toutes les sphères tangentes correspondantes ont le même rapport anharmonique. Leurs centres sont sur une surface du quatrième ordre à conique double, qui a été étudiée dans la Note XI.

Exprimons que la sphère (7) contient quatre points consécutifs d'une courbe passant au point (x_i) ; nous aurons évidemment les équations

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} x_i \, dx_i = 0 \,, \tag{8}$$

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} x_i \, d^2 x_i = 0 \,, \tag{9}$$

$$\sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} x_i \, d^3 x_i = 0 \,. \tag{10}$$

La première de ces équations est identiquement vérifiée ; car on a

$$\sum x_i \, dx_i = 0 \,, \tag{11}$$

$$\sum \frac{x_i \, dx_i}{a_i - \alpha} = 0 \,, \tag{12}$$

en vertu de l'équation de la surface et de l'identité qui relie les quantités x_i.

Pour former l'équation différentielle cherchée, il faudrait donc éliminer λ entre les équations (10) et (9) Au lieu de faire cette élimination, considérons λ comme une variable

nouvelle, et différentions (9). En tenant compte de l'équation (10), il restera

$$(13) \qquad -d\lambda \sum \frac{x_i d^2 x_i}{a_i - \alpha} + \sum \frac{a_i - \lambda}{a_i - \alpha} dx_i d^2 x_i = 0 ,$$

Le second terme de cette équation est nul en vertu des relations (11), (12) et de leurs différentielles; il reste donc

$$d\lambda = 0 , \quad \lambda = \text{const.} = K .$$

(Le facteur que nous négligeons est compris dans cette solution générale.)

En résumé, il reste à intégrer l'équation, du premier ordre seulement, contenant l'arbitraire K,

$$(14) \qquad \sum \frac{a_i - K}{a_i - \alpha} dx_i^2 = 0 ,$$

les x_i satisfaisant aux équations

$$\sum x_i^2 = 0 , \quad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \alpha} = 0 ,$$

En passant aux coordonnées curvilignes des articles 50 et 51, l'équation (14) se transforme aisément dans la suivante,

$$(15) \qquad \frac{(\rho - K) d\rho^2}{f(\rho)} = \frac{(\rho_1 - K) d\rho_1^2}{f(\rho_1)} ,$$

où les variables sont séparées.

Les sphères osculatrices de toutes les courbes correspondantes à la même valeur K de λ sont de même rapport anharmonique. Cela résulte de la signification de λ.

Pour $\lambda = a_i$, elles deviennent les sphères doublement tangentes, orthogonales à (S_i). Nos courbes se réduisent alors aux cercles de la cyclide situés sur ces sphères. Il était évident *a priori* que les cercles devaient être obtenus comme solutions du problème, puisque leur sphère osculatrice en chaque point est indéterminée, et peut être prise tangente à la surface.

L'équation (15) ne s'intègre d'ailleurs algébriquement que

si $K = a_i$; alors elle se réduit à l'équation d'Euler, et donne une des cinq séries de sections circulaires.

Les trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation (15) ont pour équation différentielle

$$\frac{d\rho^2(\rho-\alpha)}{f(\rho)(\rho-K)} = \frac{d\rho_1^2(\rho_1-\alpha)}{f(\rho_1)(\rho_1-K)}. \tag{16}$$

On sait intégrer cette équation, et en particulier trouver les trajectoires orthogonales des sections circulaires des cyclides. On pourrait même déterminer les trajectoires coupant sous un angle fixe quelconque.

Comme cas limite, quand la cyclide se réduira à une sphère, on saura déterminer les trajectoires orthogonales des cercles d'une même série doublement tangents à une courbe cyclique.

Sur les quadriques, la méthode précédente donnera les trajectoires des génératrices rectilignes et des sections circulaires. Ces dernières lignes ont été déterminées par M. Catalan (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 483).

Les méthodes données par M. Liouville et par Jacobi, pour déterminer les lignes géodésiques des quadriques et intégrer les équations abéliennes, ne s'appliquent plus ici; mais elles nous conduisent à des résultats, qui paraissent dignes d'être notés. Voici les principes algébriques employés par les deux géomètres que nous venons de citer.

Soit la formule différentielle

$$d\theta^2 = C\sum \frac{\varphi'(\rho_k)\,d\rho_k^2}{f(\rho_k)\,\varphi(d)}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{17}$$

où $f(u)$ est une fonction quelconque de la seule variable u, et où

$$\varphi(u) = (u-\rho_1)(u-\rho_2)(u-\rho_3).$$

Si l'on se propose de rendre minimum l'intégrale

$$\int d\theta, \tag{18}$$

en considérant les variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 comme des fonctions de

l'une d'entre elles, ces fonctions satisferont aux équations différentielles

$$(19)\quad \begin{cases} \sum_k \frac{\sqrt{d-\rho_k}\, d\rho_k}{\sqrt{(\alpha-\rho_k)(\beta-\rho_k)f(\rho_k)}} = 0\,, & (k=1,2,3) \\ \sum_k \frac{\sqrt{d-\rho_k}\, \rho_k\, d\rho_k}{\sqrt{(\alpha-\rho_k)(\beta-\rho_k)f(\rho_k)}} = 0\,, & \end{cases}$$

où les variables sont séparées; α et β sont deux constantes arbitraires.

Si l'on a à rendre minimum l'intégrale

$$(20)\qquad \int d\Theta_1\,,$$

où

$$(21)\qquad d\Theta_1^2 = \mathrm{C}\,\frac{(\rho-\rho_1)}{(\rho-\mathrm{K})(\rho_1-\mathrm{K})}\left[\frac{d\rho^2}{f(\rho)} - \frac{d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right].$$

en considérant ρ_1 comme une fonction de ρ, on devra avoir

$$(22)\qquad \frac{d\rho\sqrt{\rho-\mathrm{K}}}{\sqrt{f(\rho)(\rho-\alpha)}} = \frac{d\rho_1\sqrt{\rho_1-\mathrm{K}}}{\sqrt{f(\rho_1)(\rho_1-\alpha)}}.$$

On emploie d'ordinaire ces résultats, en supposant que, dans le premier, d soit infini, ce qui fait disparaître le facteur $\varphi(d)$ de $d\Theta$, et dans le second K infini, ce qui fait disparaître $(\rho-\mathrm{K})(\rho_1-\mathrm{K})$.

Ces principes ne peuvent évidemment s'appliquer à la détermination des lignes géodésiques des cyclides. L'expression de ds^2, donnée (art. 50),

$$-\frac{4ds^2}{\mathrm{M}} = \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}d\rho_2^2\,,$$

contient un facteur M dont on ne peut faire abstraction. Mais,

en tenant compte de la formule (36) de l'article 50, on voit que l'expression

$$\frac{ds^2}{\sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{K - a_i}}$$

est de la forme assignée à $d\theta^2$, $d\theta_1^2$.

On saura donc trouver le minimum de l'intégrale

$$(23) \qquad \int \frac{ds}{\sqrt{A_i \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}},$$

dans les conditions qui ont été indiquées précédemment, et de là résultent les deux théorèmes suivants :

On sait déterminer les lignes de l'espace rendant minimum l'intégrale

$$(24) \qquad \int \frac{ds}{\sqrt{U}},$$

où U *est une fonction algébrique entière, du* 4e *degré au plus, qui égalée à zéro donnerait l'équation d'une cyclide.*

En d'autres termes, *on sait trouver les routes de la lumière dans un milieu pour lequel la vitesse de la lumière en chaque point serait donnée par l'équation* $v^2 = U$, *où* U *est défini comme précédemment.*

U peut se réduire à une fonction quelconque du second degré, ou au carré de la puissance par rapport à une sphère, auquel cas l'intégrale (24) se réduit à celle-ci,

$$\int \frac{ds}{S},$$

que nous avons considérée déjà dans cette Note. Alors les routes de la lumière sont des cercles orthogonaux à la sphère (S), etc.

En appliquant le deuxième principe algébrique, nous aurons le théorème suivant :

On sait déterminer sur toute cyclide les lignes rendant minimum l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U}},$$

où U, *égalé à zéro, fournirait l'équation d'une cyclide quelconque, homofocale à la première.*

Note XVI.

De quelques analogies entre la théorie des cyclides et celle des surfaces du second ordre.

Les formes d'équations que nous avons obtenues pour les cyclides ramènent la théorie de ces surfaces à celle des fonctions quadratiques et homogènes, et les rapprochent ainsi des surfaces du second degré. Aussi peut-on généraliser et étendre aux cyclides plusieurs des propositions connues de la théorie des surfaces du second degré. Nous allons donner ici deux exemples de pareilles généralisations.

I.

On peut d'abord constituer pour les cyclides une théorie analogue à celle des points correspondants d'Ivory sur deux ellipsoïdes homofocaux. Soient, en effet,

$$(1) \qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \alpha} = 0\,,$$

$$(2) \qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \beta} = 0$$

les équations de deux cyclides homofocales,

Désignons par x_i les coordonnées d'un point M sur la première cyclide. Les quantités y_i, définies par les équations

$$(3) \qquad \frac{y_i}{\sqrt{a_i - \beta}} = \frac{x_i}{\sqrt{a_i - \alpha}}\,,$$

sont évidemment les coordonnées d'un point M'; car elles satisfont à l'identité

$$\sum y_i^2 = 0\,,$$

et ce point M′ est sur la cyclide (β), car on a

$$\sum \frac{y_i^2}{a_i-\beta}=0 .$$

Nous dirons que les points M et M′ sont correspondants sur les deux cyclides (α) et (β). Deux points correspondants sont à l'intersection des deux cyclides avec une des trajectoires orthogonales de toutes les cyclides homofocales à (α) et à (β).

Cela posé, soient (A, A′), (B, B′) deux couples de points correspondants. Soient x_i, y_i, x'_i, y'_i les coordonnées respectives des points A, A′, B, B′. On aura

$$\frac{x_i}{\sqrt{a_i-\alpha}}=\frac{y_i}{\sqrt{a_i-\beta}}, \quad \frac{x'_i}{\sqrt{a_i-\alpha}}=\frac{y'_i}{\sqrt{a_i-\beta}},$$

et par suite

$$x_i y'_i = x'_i y_i ,$$

ou

$$\sum x_i y'_i = \sum x'_i y_i . \tag{4}$$

Or, d'après la formule (17) de la Note X, on a

$$\overline{AB'}^2=\frac{-2\Sigma x_i y'_i}{\sum\frac{x_i}{R_i}\sum\frac{y'_i}{R_i}}, \quad \overline{BA'}^2=\frac{-2\Sigma x'_i y_i}{\sum\frac{x'_i}{R_i}\sum\frac{y_i}{R_i}}.$$

Donc, en tenant compte de la formule (4) et en divisant les équations précédentes membre à membre, on aura une équation de la forme

$$\frac{AB'}{BA'}=\frac{f(A)}{f(B)}, \tag{5}$$

où $f(A)$, $f(B)$ désignent des fonctions ne dépendant que des coordonnées des points A et B. Nous aurons de même, en désignant par (C, C′) un troisième couple de points correspondants,

$$\frac{BC'}{CB'}=\frac{f(B)}{f(C)}, \quad \frac{CA'}{AC'}=\frac{f(C)}{f(A)},$$

et par suite

(6) $$AB' \cdot BC' \cdot CB' = BA' \cdot CB' \cdot BC' .$$

Telle est la relation qui unit les distances mutuelles de trois couples de points correspondants.

On trouvera dans un travail antérieur de l'auteur ([1]) les conséquences de cette formule qui conduit aux propriétés métriques focales des cyclides.

II.

On a vu (art. 19) que quatre points situés sur un cercle quelconque d'une cyclique sont les foyers d'une nouvelle cyclide qui contient les foyers de la première ([2]). On peut étendre ces propriétés à l'espace, et démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. *La courbe d'intersection d'une cyclide et d'une sphère quelconque peut être prise pour la focale d'une nouvelle cyclide passant par une quelconque des focales de la première.*

Plus généralement, *si deux cyclides sont inscrites l'une à l'autre suivant une courbe sphérique, les focales de l'une d'elles sont sur une surface homofocale à l'autre, et toute surface homofocale à la première est inscrite suivant une courbe sphérique à une cyclide homofocale à l'autre.*

Théorème II. *Si deux cyclides sont tangentes en quatre points et se coupent suivant deux courbes sphériques, toute cyclide homofocale à la première coupera suivant deux courbes sphériques distinctes une cyclide homofocale à la seconde. Les focales de chaque surface seront tangentes en quatre points à une des cyclides homofocales à l'autre.*

Ce dernier théorème est une conséquence du premier.

([1]) *Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales*, p. 44. — (Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat., t. VIII, p. 240.)

([2]) Plus généralement, toute cyclique ayant ces quatre points pour foyers touche en quatre points une des cyclides homofocales à la proposée.

Car soient (C), (C′) deux cyclides se coupant suivant des courbes sphériques (g), (g_1). Soit (D) une cyclide auxiliaire, ayant (g) pour focale. D'après le théorème I, il y aura deux cyclides (C_1), (C'_1), homofocales l'une à (C), l'autre à (C′), qui seront inscrites dans (D). Ces deux cyclides, inscrites à une troisième, se couperont par conséquent suivant deux courbes sphériques.

Tout se réduit donc à la démonstration du théorème I.

Soient

(1) $$C = \sum A_i x_i^2 = 0$$

l'équation d'une cyclide (C), et

(2) $$S = \sum m_i x_i = 0$$

celle d'une sphère (S). L'équation

(3) $$C' = C - S^2 = 0$$

représente une cyclide inscrite à la première en tous les points de la courbe (C, S). Cherchons les focales de cette cyclide.

A cet effet, nous prendrons d'abord une sphère quelconque (S′),

(4) $$S' = \Sigma n_i x_i = 0\ ;$$

et nous chercherons la condition pour qu'elle soit doublement tangente à la cyclide inscrite (C′). En employant un artifice dont nous avons déjà fait plusieurs fois usage, nous pouvons, de l'équation (4), tirer $x^2 + y^2 + z^2$ en fonction linéaire de x, y, z, et porter cette expression dans les x_i. Alors ces coordonnées se changeront en des fonctions linéaires α_i de x, y, z, et les deux équations

(5) $$\Sigma \alpha_i^2 = 0\ ,$$

(6) $$\Sigma A_i \alpha_i^2 - (\Sigma m_i \alpha_i)^2 = 0$$

représenteront, la première la sphère sécante (S′), la seconde une quadrique passant par la courbe [(C′), (S′)]. L'équation

(7) $$\Sigma (A_i + \lambda)\alpha_i^2 - (\Sigma m_i \alpha_i)^2 = 0$$

représentera donc toutes les quadriques passant par cette courbe, et, si l'on veut que la sphère (S') soit doublement tangente à la cyclide (C'), il faudra que, pour une valeur convenable de λ, l'équation (7) représente un système de deux plans.

Or les α_i sont liées par l'équation identique

$$\sum n_i \alpha_i = 0\,, \tag{8}$$

qu'on obtient en remplaçant x_i par α_i dans l'équation (4). Cherchons d'abord la condition pour que l'équation (7) représente un cône, c'est-à-dire une quadrique à point double.

Si la quadrique (7) a des points doubles, les coordonnées de ces points satisferont évidemment aux équations

$$(\lambda + A_i)\alpha_i - m_i(\Sigma m_i \alpha_i) = \rho n_i\,,$$

qu'on obtient en exprimant que les premiers membres de (7) et de (8) ont leurs dérivées par rapport aux α_i proportionnelles. Posons, pour abréger,

$$P = \Sigma m_i \alpha_i\,; \tag{9}$$

on aura

$$(\lambda + A_i)\alpha_i - m_i P = \rho n_i\,, \tag{10}$$

et par suite, en multipliant ces équations par $\frac{m_i}{A_i + \lambda}$ et les ajoutant,

$$P\left(1 - \sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i}\right) = \rho \sum \frac{m_i n_i}{\lambda + A_i}\,.$$

Si cette équation détermine le rapport $\frac{P}{\rho}$, les équations (9) détermineront les rapports des quantités α_i, et par conséquent la quadrique pourra bien avoir un seul point double, mais non se réduire à un système de deux plans, qui doit avoir une ligne de points doubles. Il faut donc que l'on ait

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 1\,, \tag{11}$$

$$\sum \frac{m_i n_i}{\lambda + A_i} = 0\,. \tag{12}$$

En exprimant, de plus, que les quantités α_i satisfont à l'équation de la surface, on aura

$$\sum \frac{n_i^2}{\lambda + A_i} = 0 . \tag{13}$$

Telles sont les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des sphères doublement tangentes. La première (11) fera connaître cinq valeurs de λ. A ces cinq valeurs correspondront les cinq séries de sphères doublement tangentes.

Si ces sphères se réduisent à des points, alors on doit remplacer n_i par les coordonnées x_i de ces points, et l'on obtient le résultat suivant :

L'équation (11) fait connaître cinq valeurs de λ, et les suivantes

$$\sum \frac{m_i x_i}{\lambda + A_i} = 0 , \tag{14}$$

$$\sum \frac{x_i^2}{\lambda + A_i} = 0 \tag{15}$$

représentent, quand on y substitue les cinq valeurs de λ, les cinq focales de la cyclide (C').

Or la seconde des équations peut être écrite ainsi,

$$\sum \frac{x_i^2}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{A_i}} - \lambda \Sigma x_i^2 = 0 ,$$

ou

$$\sum \frac{x_i^2}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{A_i}} = 0 ;$$

elle représente donc une cyclide homofocale à la proposée (C). Ainsi les focales d'une cyclide (C') inscrite à (C) sont sur des surfaces homofocales à (C).

C'est la première partie du théorème qu'il s'agit de démontrer. Avant d'achever la démonstration, nous allons indiquer une proposition qui résulte des calculs précédents.

Les sphères doublement tangentes à (C′) sont définies par les équations (11), (12), (13). On peut, au lieu de supposer qu'elles se réduisent à des points, les assujettir à d'autres conditions, chercher, par exemple, celles qui sont simplement tangentes à la proposée (C), et qui enveloppent par conséquent une surface à lignes de courbure circulaires. Désignons par x_i les coordonnées du point de contact de l'une de ces sphères avec la cyclide (C); on aura

$$\sum A_i x_i^2 = 0\,, \quad \sum x_i^2 = 0\,, \tag{16}$$

et aussi

$$n_i = (A_i + \mu) x_i\,, \tag{17}$$

d'après la formule (7) de la Note XI.

En substituant ces valeurs de n_i dans l'équation (13), celle-ci se réduit à

$$(\mu - \lambda)^2 \sum \frac{x_i^2}{\lambda + A_i} = 0\,.$$

Le premier facteur donne les sphères tangentes à la fois à (C) et à (C′) aux points de contact de ces deux cyclides. Écartons ces sphères ; il restera

$$\sum \frac{x_i^2}{\lambda + A_i} = 0\,,$$

d'où résulte la proposition suivante :

Théorème III. *Étant données deux cyclides* (C), (C′), *inscrites l'une à l'autre suivant une courbe sphérique, les focales de* (C′) *sont sur cinq cyclides* (C_i), *homofocales à* (C), *et, en outre, les sphères doublement tangentes à* (C′) *d'une même série et simplement tangentes à* (C) *touchent cette dernière cyclide suivant une ligne de courbure située à l'intersection de* (C) *et de l'une des surfaces* (C_i).

Cette dernière surface (C_i) est celle qui contient la focale de (C′) associée aux sphères doublement tangentes considérées.

Achevons maintenant la démonstration du théorème I. En changeant les notations dans les calculs qui précèdent, nous obtenons le résultat suivant :

Les cyclides ayant pour focale la courbe définie par les équations

$$\sum m_i x_i = 0\ , \tag{18}$$

$$\sum B_i x_i^2 = 0\ , \tag{19}$$

ont pour équation générale

$$\sum \frac{m_i^2}{B_i+\lambda} \sum \frac{x_i^2}{B_i+\lambda} - \left(\sum \frac{m_i x_i}{B_i+\lambda}\right)^2 = 0\ . \tag{20}$$

Cette équation nous montre que la cyclide (C_1), représentée par l'équation précédente et correspondante à la valeur λ, est inscrite à la cyclide (C), représentée par l'équation

$$\sum \frac{x_i^2}{B_i+\lambda} = 0\ .$$

Si maintenant on donne à λ la valeur λ', on aura une nouvelle cyclide (C'_1), homofocale à (C_1), inscrite dans une nouvelle cyclide (C')

$$\sum \frac{x_i^2}{B_i+\lambda'} = 0\ ,$$

homofocale à (C). Notre premier théorème est donc complètement démontré ([1]).

([1]) Si, dans l'équation (20), on fait

$$m_i = \frac{1}{R_i}\ , \qquad B_i = A_i\ ,$$

on obtient

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda+A_i)} \cdot \sum \frac{x_i^2}{A_i+\lambda} - \left[\sum \frac{x_i}{R_i(\lambda+A_i)}\right]^2 = 0$$

Cette équation peut s'écrire

$$\sum \frac{\left(\frac{x_i}{R_j} - \frac{x_j}{R_i}\right)^2}{(\lambda+A_i)(\lambda+A_j)} = 0\ .$$

Elle représente donc des quadriques, et ces quadriques sont homofocales.

Le théorème I conduit à un grand nombre de conséquences. On peut signaler les suivantes.

Toutes les cyclides à deux points doubles (réciproques de cônes), inscrites à une cyclide générale (C), ont leurs cercles focaux sur des cyclides homofocales à la proposée (C).

Si une cyclide à deux points doubles (P) a pour focales deux cercles d'une cyclide (C), situés sur une même sphère, toutes les cyclides à deux points doubles, homofocales à (D) et ayant par conséquent les mêmes points doubles, seront inscrites aux cyclides homofocales à (C) [1].

Deux cercles d'une cyclide faisant partie du système le plus général de surfaces homofocales ne viennent se confondre que si la cyclide s'aplatit et vient se réduire à une des cinq sphères directrices. Donc

Toutes les cyclides à quatre points doubles inscrites à une cyclide générale ou passant par une cyclique ont leurs cercles

---

Or, si l'on compare aux équations (16) de la Note XI, on voit que, pour les cinq valeurs $\lambda = A_i$, les surfaces représentées par l'équation précédente deviennent les déférentes de la cyclide

$$\Sigma A_i x_i^2 = 0 .$$

Ces cinq déférentes sont donc homofocales.

On obtient leurs trois focales, qui sont les focales singulières de la cyclide, en donnant à λ les trois valeurs qui satisfont à la condition

$$\sum \frac{1}{R_i^2(\lambda + A_i)} = 0 .$$

Alors la quadrique s'aplatit indéfiniment, et l'on trouve pour les équations de la focale

$$\sum \frac{x_i}{R_i(A_i + \lambda)} = 0 , \quad \sum \frac{x_i^2}{A_i + \lambda} = 0 .$$

On voit aussi que les surfaces homofocales aux déférentes sont inscrites dans les cyclides homofocales à la proposée. Ce fait sera expliqué et généralisé.

[1] Dans un travail antérieur déjà cité, *Sur les théorèmes d'Ivory*, etc., j'ai déjà donné ce théorème; mais par une inadvertance que je ne puis m'expliquer, j'ai écrit *cyclide à quatre points doubles* dans l'énoncé, au lieu de *cyclide à deux points doubles*.

focaux sur une des sphères contenant les focales. Ces cercles sont doublement tangents à la focale, et leurs points de contact sont des points doubles de la cyclide.

Voici des conséquences d'un autre ordre.

Les quadriques inscrites dans une cyclide ont leurs focales sur une cyclide homofocale à la proposée. Or les seules cyclides contenant des coniques sont les cyclides du troisième ordre. Donc

Les focales de toutes les quadriques inscrites dans une cyclide ou dans les cyclides homofocales engendrent les trois cyclides du troisième ordre homofocales aux proposées.

En particulier, *les focales de toutes les quadriques passant par une cyclide sphérique* (U) *engendrent les trois cyclides du troisième degré ayant* (U) *pour focale.*

On a ainsi, en transformant par l'homographie, un mode de génération des surfaces du troisième ordre, qu'on peut énoncer comme il suit :

Étant données deux quadriques (Q), (R) *et une conique* (H) *sur* (Q), *les lignes doubles des développables circonscrites à* (H) *et aux différentes quadriques passant par l'intersection de* (Q) *et de* (R) *décrivent chacune une surface du troisième ordre contenant la conique* (H).

Si une quadrique contient la focale d'une cyclide, les quadriques homofocales seront inscrites aux cyclides homofocales. Plus généralement,

Soit (Q) *une quadrique inscrite à une cyclide* (C); *les quadriques homofocales à* (Q) *seront inscrites aux cyclides homofocales à* (C).

Ces exemples suffisent à démontrer la portée des théorèmes qui précèdent.

REMARQUES ET RECTIFICATIONS.

Dans l'article 12 du texte se trouve indiquée une classification des différentes formes que peut affecter la courbe d'intersection de deux quadriques. Les résultats que je donne sur cette question ne sont pas nouveaux comme je le pensais, et se trouvent dans le *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* de M. Cremona.

Le théorème donné a l'article 19, et d'après lequel les quatre points d'intersection d'une cyclique et d'un cercle peuvent être pris pour foyers d'une nouvelle cyclique passant par quatre foyers de la première, a déjà été donné par MM. Clifford et Crofton. Voir le Mémoire de M. Crofton, *On various Properties*, etc., dans la liste qui suit. Nous étendons, du reste, ce théorème à la fois pour les courbes et pour les surfaces dans la Note XVI. Ajoutons qu'il est implicitement compris dans celui que nous avons donné (avril et août 1864) relativement aux propriétés métriques des focales des cycliques.

La propriété des coniques sphériques, énoncée et démontrée à l'article 21, se trouve indiquée d'une manière incidente et sans démonstration dans un Mémoire de M. W. Roberts (Journal de Liouville, t. X, page 313 : *Mémoire sur quelques propriétés géométriques, relatives aux intégrales elliptiques*).

Des deux constructions données pour la tangente aux cycliques (art. 24 et 31), la première a été indiquée, au moins pour les cycliques planes, par M. Clifford (voir le Mémoire de M. Crofton cité plus haut). Quant à la seconde, que j'avais donnée depuis longtemps pour les ovales de Descartes (*Annales de l'École Normale*, 1867), elle me paraît nouvelle. Je saisis cette occasion pour en indiquer un énoncé plus précis.

Étant donnés quatre points A, B, C, D, sur un cercle, les tangentes aux deux cyclides passant en M et ayant A, B, C, D pour foyers se déterminent de la manière suivante :

Construisons l'une des deux bissectrices de l'angle des droites

AB, CD, et appelons α, β, γ, δ, V les angles que font avec cette droite les lignes MA, MB, MC, MD et la tangente en M. On aura

$$V = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

Il est à remarquer que, si deux des foyers A et B deviennent imaginaires, on peut les remplacer sans inconvénient dans la construction par les foyers réels A', B', qui leur sont associés.

Dans les *Comptes Rendus* du 25 juin 1872, M. Ribaucour a donné un théorème intéressant sur les cyclides :

Les plans normaux à une cyclide en tous les points d'une ligne de courbure sont tangents à une quadrique homofocale aux déférentes de la cyclide.

Ce théorème de M. Ribaucour est un cas particulier de celui que nous avons donné (Note XVI, Théorème III).

En supposant, dans notre théorème, que la cyclide inscrite se réduise à une quadrique, l'une des séries de sphères doublement tangentes se réduira aux plans tangents, et l'on obtient ainsi la proposition suivante ;

Soient deux cyclides orthogonales** (α), (β), **se coupant suivant une ligne de courbure. Les plans normaux à** (α) **en tous les points de cette ligne de courbure enveloppent une quadrique homofocale à la déférente de** (α), **et inscrite dans** (β) **suivant une courbe sphérique.

Cette proposition complète un peu l'élégant théorème de M. Ribaucour.

LISTE

de Mémoires se rapportant aux sujets traités dans cet ouvrage et publiés dans ces dernières années.

ABRÉVIATIONS :

Zeitschrift de Schlömilch : *Z. S.*
Proceedings of the London Mathematical Society : L. M. S.
Quaterly Journal : Q. J.
Journal de Crelle-Borchardt : *J. B.*
Nouvelles Annales de Mathématiques de Gerono : *N. A.*
Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences : C. R.
Bulletin de la Société Philomathique de Paris : S. P.
Annales de l'École Normale supérieure : E. N.
Journal de Liouville : *J. L.*

Berner (Th.). — Uber eine geometrische Erzeugung von confocalen Curven vierten Grades. *Z. S.*, t. IX, p. 369; oct. 1864.

Casey. — On the Bicircular Quartics. *Transactions of the Royal Irish Academy of Dublin*, 10 février 1867.

— Recherche des équations des couples de quadriques inscrites à une quadrique donnée et tangente à quatre quadriques inscrites aussi dans la même quadrique. *Annali di Matematica*, t. II, 2e série, p. 303; 1869.

— On Cyclides and Sphero-Quartics (¹). *Philos. Trans.*, t. CLXI, p. 585-721.

Cayley. — Sur la construction graphique de la courbe d'ombre et de pénombre pendant la durée d'une éclipse de Soleil. *Monthly Notices of the R. Astr. Soc.*, avril 1870, traduit *N. A.*, 2e série, t. IX, p. 350.

— On the Mechanical Description of a Nodal Bicircular Quartic. *L. M. S.*, t. III, p. 100; 12 mai 1870.

— Note on the Cartesian. *Q. J.*; mars 1872.

— On the Cyclide. *Q. J.*; août 1872.

— On the Stereographic Projection of the Spherical Conic. *Phil. Mag.*, XXV, 1863, p. 350.

Clebsch. — Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. *J. B.*, t. LXIX, p. 142; 1868.

Clifford. — Théorèmes sur les cycliques. *Educational Times*, mars et septembre 1866.

(¹) Je ne connais ce Mémoire que par la mention qu'en a faite M. Cayley dans les *Comptes Rendus*, t. LXXIV, p. 1393.

Clifford. — Analytical Metrics. *Q. J.*, t. VII, p. 54; t. VIII, p. 16 et p. 119.

Cremona. — Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre. *J. B.*, t. LXVIII, p. 1.

— Sulla superficie di quart' ordine dotata di una conica doppia. *Rendiconto del R. Istituto Lombardo*, 2 et 23 mars 1871.

Crofton (W.). — On certain Properties of the Cartesian Ovals, treated by the Method of Vectorial Coordinates. *L. M. S.*, 19 mars 1866.

— On various Properties of Bicircular Quartics. *L. M. S.*, 28 février et 23 mai 1867.

Darboux (G.). — Sur les sections du tore. *N. A.*, 2e série, t. III, p. 156; 1864.

— Sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. *N. A.*, 2e série, t. III, p. 199; 1864.

— Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales. *C. R.*, p. 240; 1er août 1864.

— Recherches sur les surfaces orthogonales. *E. N.*, t. II, p. 55; janvier 1865.

— Sur les surfaces orthogonales. *E. N.*, t. III, p. 97; 1866.

— Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques. *E. N.*, t. IV, p. 81; 1867.

— Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces. *C. R.*, t. LXVIII, p. 1311; 7 juin 1869. Le travail actuel est la reproduction de ce Mémoire.

— Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. *C. R.*, t. LXIX, p. 392; 1869.

— Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface. *C. R.*, t. LXXIII, p. 732; 18 septembre 1871.

— Sur les théorèmes d'Ivory, relatifs aux surfaces homofocales du second degré. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. VIII, et Paris, Gauthier-Villars; janvier 1872.

— Mémoire sur les surfaces cyclides. *E. N.*, t. I, 2e série, p. 273; 1872.

— Sur la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde et sur les coordonnées elliptiques. *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. III, p. 122; avril 1872.

— Polygones inscrits et circonscrits aux coniques; nouveau système de cordonnées; propriétés des courbes du quatrième ordre. *S. P.*, 25 mai et juin 1872. Voir les nos 1962 et 1972 du journal *l'Institut*.

— Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace. *E. N.*, t. I, 2e série, p. 323; 1872.

DURÈGE. — Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch imaginäre Kreispunkte hindurchgehen. *Z. S.*, t. XIV, p. 368; 1869.

ECKART (F.). — Ueber die Curven dritten Grades, welche durch die zwei unendlich entfernten imaginaren Kreispunkte gehen. *Z. S.*, t. X, p 321; 1865

GOURNERIE (DE LA). — Mémoire sur la surface engendree par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace. *Journal de l'École Polytechnique*, cahier 40; 1863.

Note sur les lignes spiriques. *C. R.*, t. LXVI, p. 283; 1868.

— Sur une involution spéciale du quatrième ordre et son application aux lignes spiriques. *C. R.*, t. LXVI, p. 283; 1868.

— Sur la spirique à centre. *S. P.*, p. 11; 13 mars 1869.

— Mémoire sur les lignes spiriques. *J. L.*, 2e série, t. XIV, p. 9 et 103; 1869. Ce Mémoire contient, page 9, une Notice de travaux à laquelle nous renvoyons le lecteur.

KLEIN (F.). — Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, t. IV, p 573.

KUMMER. — Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. *J. B.*, t. LXIV, p. 66, et *Monatsb. d. Berl. Akad.*, juillet 1863.

LAGUERRE. — Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques. *C. R.*, t. LX, p. 70; 1865.

— Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du second degré. *S. P.*, p. 51; 23 mars 1867.

— Sur les applications de la géométrie au calcul intégral. *S P.* avril 1867.

— Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques. *S. P.*, p. 17; janvier 1868.

— Sur les Cassiniennes planes et sphériques. *S. P.*, p. 40; mars 1868.

— Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiquss. *S. P.*, p. 48; mars 1868.

— Sur quelques propriétés des lignes spiriques. *S. P.*, oct. 1869

— Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espac- *S. P.*, p. 95; avril 1870, et *N. A.*, 2e série, t, XI, p. 14. 108, 241; 1872

— Sur l'emploi des imaginaires en géométrie. *N. A.*, 2e série, t. IX, p. 163 et 241; 1870.

— Recherches géométriques sur la cyclide. *S. P.*, octobre 1871

— Sur quelques propriétés des courbes algébriques et la détermination des rayons de courbure des sections planes des surfaces anallagmatiques. *S. P.*, 1871.

LEMONNIER. — Étude analytique sur la cyclide. *N. A.*, 2e série, t. IX, p. 514, 1870.

Lie (S.). — Ueber Complexe, insbesondere Linien und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, t. V, p. 145.

Mannheim. — Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données. *N. A.*, 1re série, t. XIX, p. 7; 1860.

— Sur les arcs de courbes planes et sphériques, considérées comme enveloppes de cercles. *J. L.*, 2e série, t. VII, p. 121; 1862.

— Sur la construction du centre de courbure des anallagmatiques. *S. P.*, p. 120; 1864.

— Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques. *J. L.*, t. XVI, p. 317; 1871.

Maxwell (Clerk). — On the Cyclide. *Q. J.*, t. IX, p. 111; 1868. Traduit dans les *N. A.*, t. X, p. 162; 1871.

Moutard (Th.). — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. *S. P.*, 14 mai 1864.

— Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre. *S. P.*, 30 juillet 1864. — *N. A.*, 2e série, t. III, p. 536; 1864.

— Sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre. *C. R.*, p. 243; 1er août 1864.

Painvin. — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. *N. A.*, 2e série, t. VII, p. 481; 1868.

Roberts (S.). — On the Mechanical Description of a Nodal Bicircular Quartic. *L. M. S.*, t. II, p. 133.

— On the Ovals of Descartes. *L. M. S.*, t. III, p. 106; 12 mai 1870.

Ribaucour. — Sur les lignes de courbure. *C. R.*, 10 et 25 juin 1872.

Siebeck. — Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. *J. B.*, t. LVII, p. 359, et t. LIX, p. 173; années 1860-61.

Sylvester. — Voir *Educational Times*, avril 1867, et *Philosophical Magazine*, 1865-66.

Weyr (Emil.). — Ueber Involutionen höheren Grades. *J. B.*, t. LXXI; 1870.

Octobre 1872.

FIN.